

MAURICIO DANIEL FORMAGGIO



8  
19

**ANÁLISE DO ESCOAMENTO DO AR  
AO REDOR DE UM AEROFÓLIO**

Trabalho de formatura  
apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo  
para a obtenção do título de  
Graduação em Engenharia

**São Paulo  
2004**

**MAURICIO DANIEL FORMAGGIO**

**ANÁLISE DO ESCOAMENTO DO AR  
AO REDOR DE UM AEROFÓLIO**

Trabalho de formatura  
apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo  
para a obtenção do título de  
Graduação em Engenharia

**Área de Concentração:  
Engenharia Mecânica**

**Orientador:  
Prof. Livre-Docente  
Júlio Romano Meneghini**

**São Paulo  
2004**

À minha estimada família e aos meus amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todas as pessoas que me apoiaram durante os anos de faculdade, permitindo que chegasse até aqui. Em especial gostaria de agradecer.

A meus pais, Geraldo e Ivani, pelo exemplo e apoio em todas as minhas decisões.

A meus irmãos, Francisco e Leonardo e familiares.

Ao meu orientador, Professor Doutor Júlio Romano Meneghini, por todas as recomendações e atenção dedicada ao desenvolvimento não só deste trabalho, mas de minha vida profissional.

Ao Professor Fábio Saltara, pelo “curso de férias” de CFD.

Ao amigo, Alessandro Alberto de Lima, pelo apoio e suporte neste trabalho.

# SUMÁRIO

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

## RESUMO

## ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. OBJETIVOS .....	3
3. FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS.....	4
3.1.2. Enfoque Diferencial versus Enfoque Integral .....	5
3.1.3. O Fluido como um Contínuo .....	5
3.1.4. Campo de Velocidade .....	8
3.1.5. Campo de Tensão.....	9
3.1.6. Viscosidade.....	12
3.1.7. Fluido Newtoniano.....	13
3.1.8. Escoamento Laminar e Turbulento .....	13
3.2. Enfoque Diferencial.....	16
3.2.1. A conservação da massa .....	16
3.2.2. Movimento de um elemento fluido.....	21
3.2.2.1. Translação de Fluido .....	22
3.2.2.2. Rotação de um Fluido.....	26
3.2.2.3. Deformação Angular.....	30
3.2.2.4. Deformação Linear .....	31
3.2.3. Equação da Quantidade de Movimento .....	31
3.2.3.1. Forças atuando sobre a partícula .....	32
3.2.3.2. Equação Diferencial da Quantidade de Movimento.....	34
3.2.3.3. Fluidos Newtonianos: Equações de Navier-Stokes .....	34
3.3. Conceitos Básicos do Escoamento Externo .....	36
3.3.1. Arrasto.....	36
3.3.2. Sustentação .....	36

4. FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL .....	37
4.1. Aspectos Gerais .....	37
4.2. O método dos volumes finitos.....	40
4.2.1. Funções de interpolação para MVF .....	42
4.2.1.1. UpWind de 1 <sup>a</sup> ordem .....	43
4.2.1.2. UpWind de 2 <sup>a</sup> ordem .....	43
4.3. Geração de Malhas Não-Estruturadas.....	44
4.3.1. Noções gerais relativas a malhas.....	44
4.3.1.1. Propriedades Geométricas .....	45
4.3.1.2. Propriedades de Natureza Física .....	46
4.3.2. Descrição Geral.....	48
4.3.2.1. Informação Geométrica .....	48
4.3.2.2. Informações Necessárias ao Processamento .....	48
4.3.2.3. Informações Físicas.....	49
4.3.3. Metodologia Geral para Criação de Malhas .....	50
4.3.4. Métodos de Frente Progressiva (Advancing Front Methods) .....	50
4.3.4.1. Métodos de frente progressiva em duas dimensões .....	52
4.4. Modelagem da Turbulência .....	58
4.4.1. A equação de transporte .....	59
4.4.2. Modelando a Viscosidade Turbulenta .....	59
4.4.3. Modelando a Produção de Turbulência.....	60
4.4.4. Modelando a Destrução Turbulenta .....	61
4.4.5. O Modelo DES .....	61
4.4.6. Constantes do Modelo .....	62
4.4.7. Condições de Contorno na Parede .....	62
4.4.8. Modelando a Transferência de Calor e de Massa.....	63
5. Resultados .....	64
5.1. Geometrias Bidimensionais .....	64
5.1.1. Perfil NACA 2412 .....	65
5.1.1.1. Ângulo de ataque de 0° .....	65
5.1.1.2. Ângulo de ataque de 3° .....	66
5.1.1.3. Ângulo de ataque de 6° .....	68
5.1.2. Perfil NACA 0012 .....	69

5.1.2.1. Ângulo de ataque de 0º .....	69
5.1.3. Perfis NACA 0012 versus 2412.....	72
5.2. Geometrias Tridimensionais .....	75
5.2.1. Geometria 01 .....	77
5.2.1.1. Resultados gráficos .....	77
5.2.2. Geometria 02 .....	81
5.2.2.1. Resultados gráficos .....	82
5.2.3. Geometria 03 .....	86
5.2.3.1. Resultados gráficos .....	87
5.2.4. Geometria 04 .....	91
5.2.4.1. Resultados gráficos .....	92
5.2.5. Geometria 05 .....	96
5.2.5.1. Resultados gráficos .....	97
5.2.6. Resumo dos Resultados .....	102
6. Comentários e Conclusões .....	103
7. Bibliografia.....	105

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 <i>Comportamento de um sólido e de um fluido sob a ação de uma tensão de cisalhamento constante.</i> .....	5
Figura 2 <i>Definição de massa específica num ponto.</i> .....	6
Figura 3 <i>O conceito de tensão num meio contínuo.</i> .....	9
Figura 4 <i>Componentes da força e da tensão sobre um elemento de área <math>\delta A_x</math>.</i> .....	10
Figura 5 <i>Notação para tensões.</i> .....	11
Figura 6 <i>A deformação de um elemento fluido.</i> .....	12
Figura 7 <i>Variação da velocidade axial com o tempo.</i> .....	14
Figura 8 <i>Volume de controle diferencial.</i> .....	16
Figura 9 <i>Elemento infinitesimal de fluido.</i> .....	21
Figura 10 <i>Representação gráfica dos componentes do movimento de fluido.</i> .....	22
Figura 11 <i>O movimento de uma partícula num campo de escoamento.</i> .....	23
Figura 12 <i>Rotação de um elemento.</i> .....	26
Figura 13 <i>Deformação angular de um elemento fluido.</i> .....	30
Figura 14 <i>Tensões na direção x sobre um elemento fluido.</i> .....	33
Figura 15 <i>Interpretação da equação geral do método dos volumes finitos.</i> .....	38
Figura 16 <i>Esquema dos volumes de controle para discretização.</i> .....	41
Figura 17 <i>Volume de Controle unidimensional.</i> .....	42
Figura 18 <i>Diferentes numerações dos nós de um elemento triangular.</i> .....	49
Figura 19 <i>Esquema geral do método de frente progressiva.</i> .....	51
Figura 20 <i>Padrão 1.</i> .....	52
Figura 21 <i>Padrão 2.</i> .....	53
Figura 22 <i>Padrão 3.</i> .....	53
Figura 23 <i>Estados da frente progressiva.</i> .....	54
Figura 24 <i>Malha final.</i> .....	55
Figura 25 <i>Malha antes e depois de ser refinada.</i> .....	56
Figura 26 <i>Frente progredindo por inflação.</i> .....	56
Figura 27 <i>Frente progredindo pelo avanço de uma linha.</i> .....	57
Figura 28 <i>Campo de Velocidade.</i> .....	65
Figura 29 <i>Campo de Pressão em Pa.</i> .....	66
Figura 30 <i>Campo de Velocidade.</i> .....	66
Figura 31 <i>Campo de Pressão em Pa.</i> .....	67
Figura 32 <i>Campo de Velocidade.</i> .....	68
Figura 33 <i>Campo de Pressão em Pa.</i> .....	69
Figura 34 <i>Campo de Pressão.</i> .....	70
Figura 35 <i>Campo de Temperatura.</i> .....	70
Figura 36 <i>Campo de Velocidade.</i> .....	71
Figura 37 <i>Oscilação do coeficiente de sustentação para uma malha com 41192 elementos.</i> .....	72
Figura 38 <i>Oscilação do coeficiente de arrasto para uma malha com 41192 elementos.</i> .....	73
Figura 39 <i>Oscilação do coeficiente de sustentação para uma malha com 120728 elementos.</i> .....	73

Figura 40 <i>Oscilação do coeficiente de arrasto para uma malha com 120728 elementos.</i>	74
Figura 41 <i>Campo de Pressão ao longe.</i>	75
Figura 42 <i>Face de simetria.</i>	76
Figura 43 <i>“Zoom” na região da face de simetria.</i>	76
Figura 44 <i>Malha da geometria utilizada na primeira simulação.</i>	77
Figura 45 <i>Linhas de corrente.</i>	78
Figura 46 <i>Contorno de pressão na superfície superior da geometria.</i>	78
Figura 47 <i>Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.</i>	79
Figura 48 <i>Contorno de temperatura na parede de simetria.</i>	79
Figura 49 <i>Contorno de velocidade na parede de simetria.</i>	80
Figura 50 <i>Valores de vorticidade no plano afastado <math>\frac{1}{2}</math> corda da asa.</i>	81
Figura 51 <i>Malha da geometria utilizada na segunda simulação.</i>	82
Figura 52 <i>Linhas de corrente.</i>	83
Figura 53 <i>Contorno de pressão na superfície superior da geometria.</i>	83
Figura 54 <i>Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.</i>	84
Figura 55 <i>Contorno de temperatura na parede de simetria.</i>	84
Figura 56 <i>Contorno de velocidade na parede de simetria.</i>	85
Figura 57 <i>Valores de vorticidade no plano afastado <math>\frac{1}{2}</math> corda da asa.</i>	86
Figura 58 <i>Malha da geometria utilizada na terceira simulação.</i>	87
Figura 59 <i>Linhas de corrente.</i>	88
Figura 60 <i>Contorno de pressão na superfície superior da geometria.</i>	88
Figura 61 <i>Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.</i>	89
Figura 62 <i>Contorno de temperatura na parede de simetria.</i>	89
Figura 63 <i>Contorno de velocidade na parede de simetria.</i>	90
Figura 64 <i>Valores de vorticidade no plano afastado <math>\frac{1}{2}</math> corda da asa.</i>	91
Figura 65 <i>Malha da geometria utilizada na quarta simulação.</i>	92
Figura 66 <i>Linhas de corrente.</i>	93
Figura 67 <i>Contorno de pressão na superfície superior da geometria.</i>	93
Figura 68 <i>Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.</i>	94
Figura 69 <i>Contorno de temperatura na parede de simetria.</i>	94
Figura 70 <i>Contorno de velocidade na parede de simetria.</i>	95
Figura 71 <i>Valores de vorticidade no plano afastado <math>\frac{1}{2}</math> corda da asa.</i>	96
Figura 72 <i>Malha da geometria utilizada na quinta simulação.</i>	97
Figura 73 <i>Linhas de corrente.</i>	98
Figura 74 <i>Contorno de pressão na superfície superior da geometria.</i>	98
Figura 75 <i>Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.</i>	99
Figura 76 <i>Contorno de temperatura na parede de simetria.</i>	99
Figura 77 <i>Contorno de velocidade na parede de simetria.</i>	100
Figura 78 <i>Contorno de vorticidade no plano localizado a <math>\frac{1}{2}</math> corda do bordo de fuga.</i>	101

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área ( $m^2$ )
$\vec{a}$	Aceleração ( $m/s^2$ )
$C_D$	Coeficiente de arrasto ( <i>sem dimensão</i> )
$C_L$	Coeficiente de sustentação ( <i>sem dimensão</i> )
$c_p$	Calor específico à pressão constante ( $J/kg - K$ )
$c_v$	Calor específico a volume constante ( $J/kg - K$ )
$E$	Energia total ( $J$ )
$\vec{F}$	Vetor de força ( $N$ )
$F_D$	Força de arrasto ( $N$ )
$\vec{g}$	Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ )
$H$	Entalpia total ( <i>energia/massa</i> )
$h$	Coeficiente de convecção térmica ( $W/m^2 - K$ )
$k$	Energia cinética por unidade de massa ( $J/kg$ )
$l, L$	Escala de comprimento ( $m$ )
$L$	Força de sustentação ( $N$ )
$m$	Massa ( $kg$ )
$\dot{m}$	Vazão mássica ( $kg/s$ )
$M_w$	Peso molecular ( $kg/kmol$ )
$M$	Número de Mach ( <i>sem dimensão</i> )
$p$	Pressão ( $Pa$ )
$R$	Constante universal dos gases ( $8.31447 \times 10^3 J/kgmol - K$ )
$R_e$	Número de Reynolds ( <i>sem dimensão</i> )
$T$	Temperatura ( $K$ )
$t$	Tempo ( $s$ )

$U$	Velocidade do escoamento ao longe ( $m/s$ )
$u, v, w$	Componentes do vetor velocidade ( $m/s$ )
$V$	Volume ( $m^3$ )
$\vec{v}$	Vetor velocidade ( $m/s$ )
$\delta$	Função Delta ('0' ou '1')
$\mu$	Viscosidade dinâmica ( $Pa \cdot s$ )
$\nu$	Viscosidade cinética ( $m^2/s$ )
$\rho$	Densidade ( $kg/m^3$ )
$\sigma$	Tensão na superfície ( $N/m^2$ )
$\tau$	Tensão de cisalhamento ( $N/m^2$ )
$\Omega_{ij}$	Tensor de rotação ( $s^{-1}$ )

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia para obtenção dos coeficientes de arrasto e sustentação de cinco asas distintas. Começando com uma asa de geometria simples, o estudo avançou até a implantação de diferentes “winglets” nas demais asas, colocados de forma a produzir um acréscimo na força aerodinâmica vertical, conhecida como “*Down Force*”. O estudo foi realizado através de técnicas de solução numérica de equações diferenciais do movimento do fluido (conservação da massa, quantidade de movimento e energia), sem as quais não seria possível a conclusão desta obra, tendo em vista o tempo e o custo embutidos em ensaios experimentais. Ao final deste, encontram-se alguns comentários pertinentes aos resultados obtidos e uma análise comparativa entre as geometrias estudadas, mostrando claramente os efeitos causados pelos “winglets” nos valores dos coeficientes aerodinâmicos.

## ABSTRACT

This report presents a methodology for attainment the drag and lift coefficients of five distinct wings. Starting with a simple geometry wing, this study advanced until the implantation of different winglets in the others wings, placed to produce an addition in the vertical aerodynamic force, known as "Down Force". The study was carried through techniques of numerical solution of differentials equations of the movement of the fluid (mass conservation, momentum and energy), without which the conclusion of this workmanship would not be possible, in view of the time and the cost inlaid in experimental tests. At the end, there are some pertinent commentaries to the gotten results meet and a comparative analysis between the shapes studied, showing clearly the effect caused for winglets in the values of the aerodynamic coefficients.

## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de técnicas numéricas para a solução de problemas, de certa forma complexos, da engenharia, só é uma realidade, atualmente, graças ao desenvolvimento de super computadores e de grande capacidade física, para armazenamento de dados.

A ampla aceitação dos modelos numéricos pelos que estão interessados na solução desses problemas é explicada pela grande e relativa simplicidade de aplicação destas técnicas.

A solução de um escoamento turbulento supersônico sobre um aerofólio, na década de 60, consumiria um tempo de processamento de cerca de 30 anos, enquanto que, nos dias atuais, seriam necessários alguns minutos para realizar essa tarefa.

Tanto no meio acadêmico-científico como no industrial, o uso de técnicas numéricas para a solução desses problemas tende a ficar cada vez mais fácil e acessível, pois os custos envolventes são cada vez menores. A utilização de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) em diversas áreas de engenharia tem aumentando significativamente nos últimos anos, isto em função da diminuição dos custos dos recursos computacionais necessários nesse campo. A vantagem da utilização de métodos numéricos para a análise do problema é a possibilidade de estudar em detalhes e com condições controladas o escoamento, realizando estudos paramétricos a um custo factível quando comparado a estudos experimentais. Entretanto, o simulador numérico deve ser cuidadosamente validado e confrontado com resultados experimentais para que estudos inéditos possam ser considerados confiáveis.

Um exemplo do emprego bem sucedido da Dinâmica dos Fluidos Computacional como ferramenta de projeto e análise pode ser encontrado em Morgan and Weatherill (1996): no projeto do avião A330/A340 da companhia européia AIRBUS, 800 tipos de asas foram analisados, levando-se um tempo de 2 anos a um custo de US\$1.000.000. Caso a mesma análise paramétrica fosse feita em túnel de vento, para instrumentar e ensaiar os 800 tipos de asas seriam necessários 150 anos a um custo de aproximadamente US\$130.000.000. As simulações, nesse caso, são na maioria baseadas na solução da equação de Euler e resultados passíveis de serem aplicados em projetos foram obtidos

no final da década de 80 e início dos anos 90. Atualmente, avanços significativos visando à utilização da solução completa da equação de Navier-Stokes têm sido feitos, mas, no entanto, aplicáveis apenas a problemas que envolvam geometrias simples.

## 2. OBJETIVOS

Estudar o método de volumes finitos para solução numérica de problema da engenharia, bem como os “softwares” utilizados para tal técnica.

Além disso, temos em mente, o desenvolvimento de uma metodologia para obtenção do coeficiente de sustentação ( $C_L$ ), coeficiente de arrasto ( $C_D$ ), para determinadas geometrias; e verificação do comportamento desses coeficientes, bem como a relação entre si, quando da modificação em alguns locais da geometria.

O principal foco na realização deste trabalho é aliar o avanço tecnológico ocorrido nos últimos anos, tornando os computadores cada vez mais poderosos, com o crescente desenvolvimento de algoritmos computacionais, que tornam economicamente viável a análise de escoamentos complexos da engenharia, tal qual aqui apresentado.

## 3. FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

### 3.1. Aspectos Gerais

As idéias mostradas neste capítulo podem ser encontradas na referência [1] e no desejo do leitor deve ser consultada para maiores esclarecimentos.

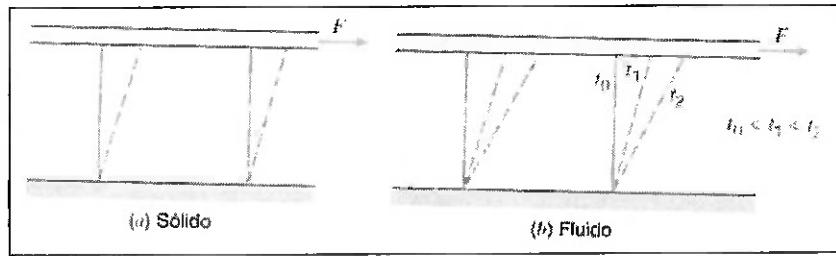
#### 3.1.1. Definição de um Fluido

A mecânica dos fluidos lida com o comportamento dos fluidos em repouso e em movimento.

*Definição:* um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando o quanto pequena esta possa ser.

Assim, os fluidos compreendem as fases líquida e gasosa (ou de vapor) das formas físicas nas quais a matéria existe. A distinção entre um fluido e o estado sólido da matéria é clara quando você compara os seus comportamentos. Um sólido deforma-se quando uma tensão de cisalhamento lhe é aplicada, mas não continuamente.

Na Figura 1, os comportamentos de um sólido (a) e de um fluido (b), sob a ação de uma força tangencial constante, são comparados. Na figura 3.1a, a força de cisalhamento é aplicada sobre o sólido através da placa superior à qual ela está ligado. Quando a força cisalhante é aplicada na parte superior, o bloco se deforma como mostrado. Sabemos, pois que, desde que o limite elástico não seja ultrapassado, a deformação é proporcional à tensão de cisalhamento aplicada,  $\tau = F/A$ , onde  $A$  é a área da superfície em contato com a placa.



**Figura 1** Comportamento de um sólido e de um fluido sob a ação de uma tensão de cisalhamento constante.

Consideremos agora um elemento fluido entre as duas placas, como visto na Fig 3.1b. Enquanto a força  $F$  estiver aplicada na placa superior, a deformação do elemento fluido aumenta continuamente. O fluido em contato direto com a fronteira sólida tem a velocidade da própria fronteira; não há deslizamento. Este é um fato experimental baseado em numerosas observações do comportamento dos fluidos. A forma do elemento fluido em instantes sucessivos  $t_0 < t_1 < t_2$ , é mostrada pelas linhas tracejadas. Como o movimento do fluido continua sob a aplicação de uma tensão cisalhante, podemos, alternativamente, definir um fluido como uma substância incapaz de suportar tensão de cisalhamento quando em repouso.

### 3.1.2. Enfoque Diferencial versus Enfoque Integral

As leis básicas que aplicamos na mecânica dos fluidos podem ser formuladas em termos de sistemas e de volumes de controle infinitesimais ou finitos.

No primeiro caso, as equações resultantes são equações diferenciais. A solução das equações diferenciais do movimento provê um meio de determinar o comportamento detalhado (ponto a ponto) do fluido, enfoque que será dado no percorrer deste trabalho.

Frequentemente a informação procurada não requer conhecimento detalhado do escoamento. Nestes casos, é mais apropriado empregar a formulação integral das leis básicas.

### 3.1.3. O Fluido como um Contínuo

Na definição de fluido apresentada anteriormente, nenhuma menção foi feita a estrutura molecular da matéria. Todos os fluidos são compostos de moléculas em constante movimento. Contudo, na maioria das aplicações de engenharia, estamos interessados

nos efeitos médios ou macroscópicos de muitas moléculas. São esses efeitos que geralmente percebemos e medimos. Tratamos, assim, um fluido como uma substância infinitamente divisível, um *contínuo*, e deixamos de lado o comportamento das moléculas individuais.

O conceito de um contínuo é a base da mecânica dos fluidos clássica. A hipótese é válida no tratamento do comportamento dos fluidos sob condições normais. Entretanto, ela passa a ser falha sempre que a trajetória média livre das moléculas se torna da mesma ordem de grandeza da menor dimensão característica significativa do problema. Em casos como o escoamento de gás rarefeito, devemos abandonar o conceito de contínuo em favor dos pontos de vista microscópico e estatístico.

Em consequência da hipótese do contínuo, cada propriedade do fluido é considerada como tendo um valor definido em cada ponto do espaço. Dessa forma, as propriedades do fluido como massa específica, temperatura, velocidade etc. são consideradas funções contínuas da posição e do tempo.

Para ilustrar o conceito de uma propriedade num ponto, considere a maneira pela qual determinamos a massa específica num ponto. Uma região de fluido é mostrada na Figura 2.

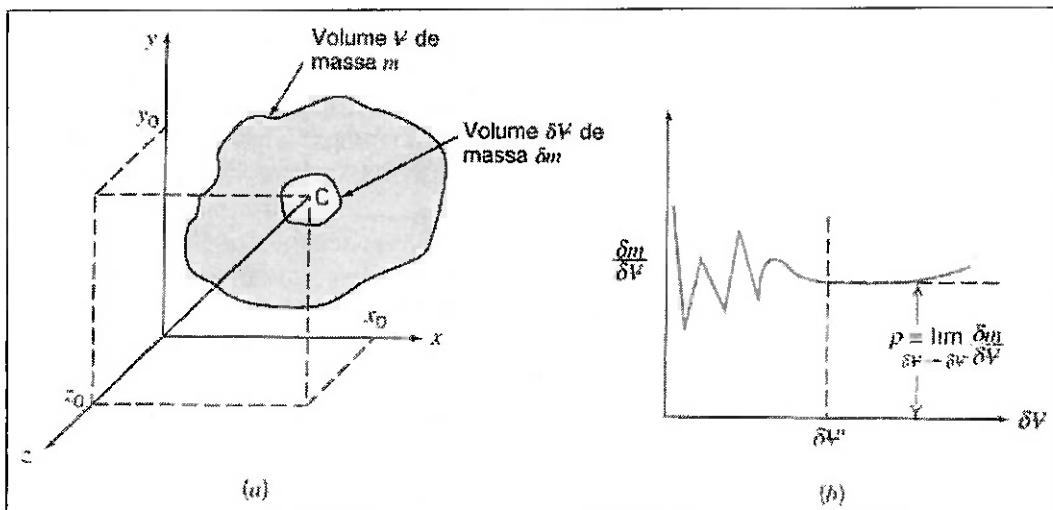


Figura 2 Definição de massa específica num ponto.

Estamos interessados em determinar a massa específica no ponto  $C$ , cujas coordenadas são  $x_0, y_0$  e  $z_0$ . A massa específica é definida como massa por unidade de volume. Então, a massa específica média dentro do volume  $\nabla$  será dada por  $\rho = m/\nabla$ . Em geral, isso

não será igual ao valor da massa específica no ponto  $C$ . Para determinar a massa específica em  $C$ , devemos selecionar um pequeno volume  $\delta V$ , ao redor do ponto  $C$  e determinar a razão  $\delta m / \delta V$ . O incremento do volume  $\delta V$  deve ser suficientemente grande para fornecer um valor significativo e reproduzível da massa específica num local e ainda pequeno o suficiente para poder detectar variações espaciais da massa específica. A massa específica tende a se aproximar de um valor assintótico a medida que o volume é reduzido, encerrando apenas fluido homogêneo na vizinhança imediata no ponto  $C$ . Quando  $\delta V$  fica tão pequeno que passa a conter apenas um pequeno número de moléculas, torna-se impossível fixar um valor definido para  $\delta m / \delta V$ ; o valor irá variar imprevisivelmente enquanto moléculas cruzam para dentro e para fora do volume. Há por conseguinte, um valor inferior para  $\delta V$ , designado  $\delta V'$  na Fig 3.2b, permitível para uso na definição de massa específica num ponto. A massa específica num “ponto” é então definida como

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}$$

Uma vez que o ponto  $C$  foi arbitrário, a massa específica em qualquer ponto do fluido poderia ser determinada de modo semelhante. Se determinações de massa específica fossem feitas simultaneamente em um número infinito de pontos do fluido, obteríamos uma expressão para a distribuição de massa específica como função das coordenadas espaciais,  $\rho = \rho(x, y, z)$ , no instante de tempo dado.

A massa específica em qualquer ponto pode variar com o tempo como resultado de trabalho realizado sobre o fluido, ou por ele, ou de transferência de calor para o mesmo. Então, a representação completa da massa específica é dada por

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Como a massa específica é uma quantidade escalar, exigindo apenas a especificação de uma magnitude para descrição completa, o campo representado pela equação acima é escalar.

### 3.1.4. Campo de Velocidade

Vimos que a hipótese do contínuo levou diretamente à noção de campo de massa específica. Outras propriedades dos fluidos também podem ser descritas por meio de campos.

Ao lidarmos com fluidos em movimento, estaremos necessariamente preocupados com a descrição de um campo de velocidade. Na Figura 2a definimos a velocidade do fluido no ponto  $C$  como a velocidade instantânea no centro de gravidade do volume,  $\delta V'$ , que instantaneamente envolve o ponto  $C$ . Se definirmos uma *partícula fluida* como uma pequena massa do fluido, de identidade fixa, de volume  $\delta V'$ , segue-se que a velocidade no ponto  $C$  é definida como a velocidade instantânea da partícula fluida que, num dado instante, está passando pelo ponto  $C$ . A velocidade em qualquer ponto do campo do escoamento é definida de modo similar. Num dado instante, o campo de velocidade,  $\vec{V}$ , é uma função das coordenadas espaciais  $x, y, z$ . A velocidade em qualquer ponto do escoamento pode variar de um instante a outro. Então, a representação completa da velocidade é dada por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Velocidade é uma quantidade vetorial, exigindo uma magnitude e uma direção para uma completa descrição; por conseguinte, o campo de velocidade é um campo vetorial.

O vetor velocidade,  $\vec{V}$ , pode também ser escrito em termos dos seus três componentes escalares. Denotando os componentes nas direções,  $x, y, z$  por  $u, v, w$ , então

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Em geral, cada componente,  $u, v$  e  $w$ , será uma função de  $x, y, z$  e  $t$ .

Se as propriedades em cada ponto de um campo de escoamento não mudam com o tempo, o escoamento é denominado *permanente*. Matematicamente, a definição de escoamento permanente é

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

onde  $\eta$  representa qualquer propriedade do fluido.

### 3.1.5. Campo de Tensão

As tensões num meio resultam das forças que atuam em alguma porção dele. O conceito de tensão nos dá uma forma conveniente de descrever o modo pelo qual as forças atuantes nas fronteiras do meio são transmitidas através dele. Como a força é a área são ambas as quantidades vetoriais, podemos prever que o campo de tensão não será vetorial. Veremos que, em geral, são necessárias nove quantidades para especificar o estado de tensão num fluido.

Imaginemos agora uma superfície qualquer no interior de um fluido em escoamento, e considere a força de contato transmitida de uma face da superfície para a outra. Considere uma porção,  $\delta\vec{A}$ , da superfície na vizinhança do ponto  $C$ . A orientação de  $\delta\vec{A}$  é dada pelo vetor unitário,  $\hat{n}$ , mostrado na Figura 3. O vetor  $\hat{n}$  é normal à superfície apontando para fora dela.

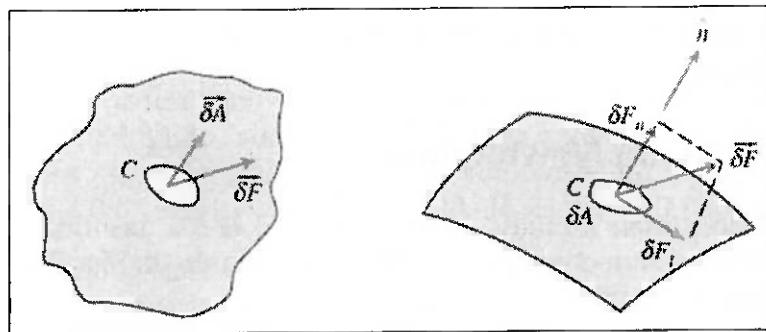


Figura 3 O conceito de tensão num meio contínuo.

A força,  $\delta\vec{F}$ , atuando sobre  $\delta\vec{A}$ , pode ser decomposta em duas componentes, uma normal e a outra tangente à área. Uma tensão normal  $\sigma_n$  e uma tensão cisalhante  $\tau_n$ , são então definidas como

$$\sigma_n = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A_n}$$

e

$$\tau_n = \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A_n}$$

O índice  $n$  na tensão foi incluído para lembrar que as tensões estão associadas com a superfície  $\delta \vec{A}$  que passa por  $C$ , tendo uma normal com a direção e sentido de  $\hat{n}$ . Para qualquer outra superfície passando por  $C$ , os valores das tensões são diferentes.

Ao lidarmos com quantidades vetoriais tais como força, é usual considerar as componentes num sistema de coordenadas cartesianas. Em coordenadas ortogonais, podemos considerar as tensões atuando em planos cujas normais orientadas para fora estão nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

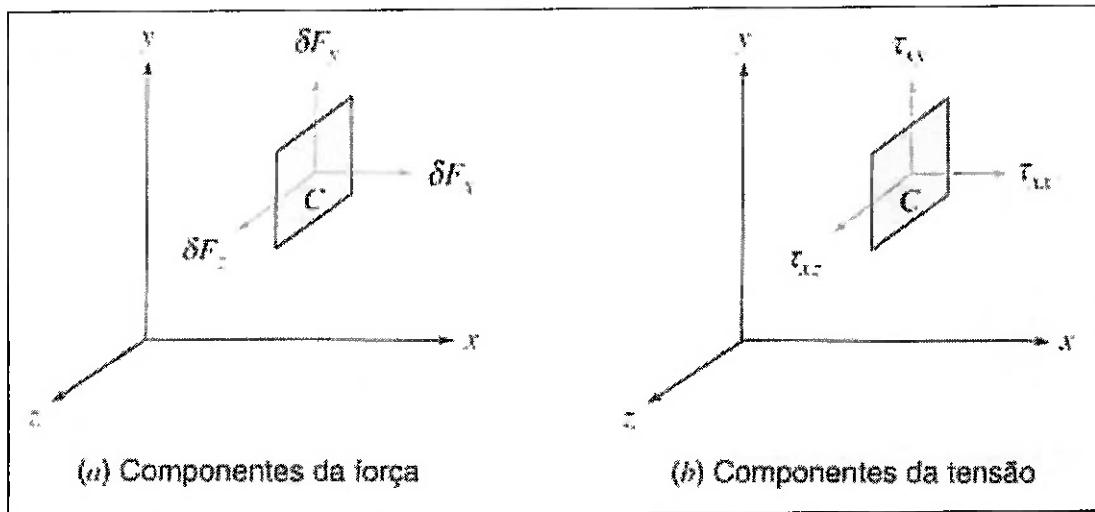


Figura 4 Componentes da força e da tensão sobre um elemento de área  $\delta A_x$ .

Na Figura 4 consideramos a tensão no elemento  $\delta A_x$  cuja normal orientada para fora está na direção do eixo  $x$ . A força,  $\delta \vec{F}$ , foi decomposta em componentes ao longo de cada eixo coordenado. Dividindo a magnitude de cada componente da força pela área,  $\delta A_x$ , e tomando o limite quando  $\delta A_x$  tende a zero, definimos as três componentes da tensão mostradas na Figura 4b:

$$\sigma_{xx} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_x}$$

$$\tau_{xx} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_y}{\delta A_x}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\delta A_x \rightarrow 0} \frac{\delta F_z}{\delta A_x}$$

Utilizamos índice duplo para designar as tensões. O primeiro índice indica o plano no qual a tensão atua. O segundo índice indica a direção na qual a tensão atua.

Ao considerarmos a área elementar  $\delta A_y$ , definiremos as tensões  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{yz}$ ; a utilização da área elementar  $\delta A_z$  levaria, de modo análogo, à definição de  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ .

A tensão num ponto é especificada pelas nove componentes, a saber:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

onde  $\sigma$  foi usado para denotar uma tensão normal, e  $\tau$  para denotar uma tensão de cisalhamento. A notação para designação de tensão é mostrada na Figura 5.

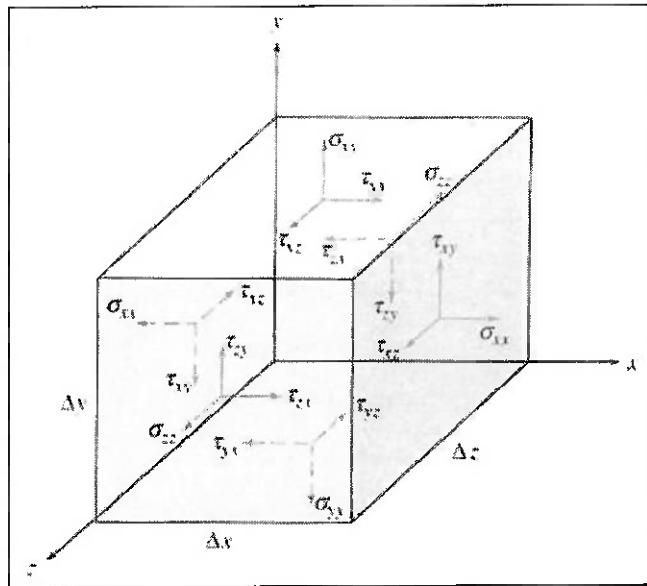


Figura 5 Notação para tensões.

Na Figura 5, todas as tensões foram traçadas como positivas. As componentes das tensões serão negativas quando o seu sentido e o plano no qual atuam tiverem sinais opostos.

### 3.1.6. Viscosidade

Consideremos o comportamento de um elemento fluido entre duas placas infinitas como mostrado na Figura 6.

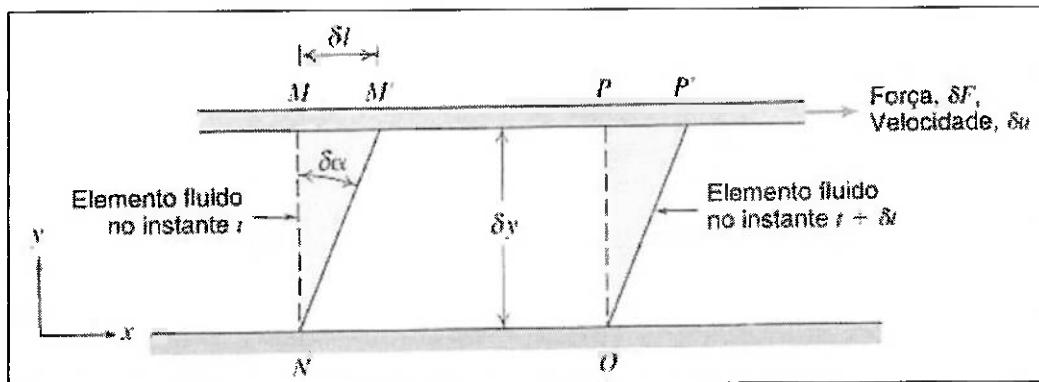


Figura 6 A deformação de um elemento fluido.

A placa superior move-se com velocidade constante,  $\delta u$ , sob a influência de uma força constante,  $\delta F_x$ . A tensão de cisalhamento  $\tau_{yx}$ , aplicada ao elemento fluido é dada por

$$\tau_{yx} = \lim_{\delta A_y \rightarrow 0} \frac{\delta F_x}{\delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y}$$

onde  $\delta A_y$  é a área do elemento fluido em contato com a placa, e  $\delta F_x$  é a força exercida pela placa sobre o elemento. Durante o intervalo de tempo  $\delta t$ , o elemento fluido é deformado da posição  $MNOP$  para a posição  $M'N'OP'$ . A taxa de deformação do fluido é dada por

$$\text{taxa de deformação} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Para calcular a tensão de cisalhamento,  $\tau_{yx}$ , é desejável expressar  $d\alpha/dt$  em função de quantidades prontamente mensuráveis. A distância  $\delta l$ , entre os ponto  $M$  e  $M'$  é dada por

$$\delta l = \delta u \cdot \delta t$$

ou, para pequenos ângulos

$$\delta l = \delta y \cdot \delta \alpha$$

Igualando essas duas expressões,

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta u}{\delta y}$$

Tomando os limites em ambos os lados da igualdade, temos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Dessa forma, o elemento fluido da Fig 3.6, quando submetido à tensão de cisalhamento,  $\tau_{yx}$ , experimenta uma taxa de deformação dada por  $du/dy$ .

### 3.1.7. Fluido Newtoniano

Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são chamados *fluidos newtonianos*.

Os fluidos mais comuns, como ar, água, são newtonianos em condições normais. Se o fluido da Fig 3.6 for newtoniano, então

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy}$$

A constante de proporcionalidade na equação acima é a viscosidade absoluta,  $\mu$ . Portanto, a lei de Newton da viscosidade é dada, para um escoamento unidimensional, por

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

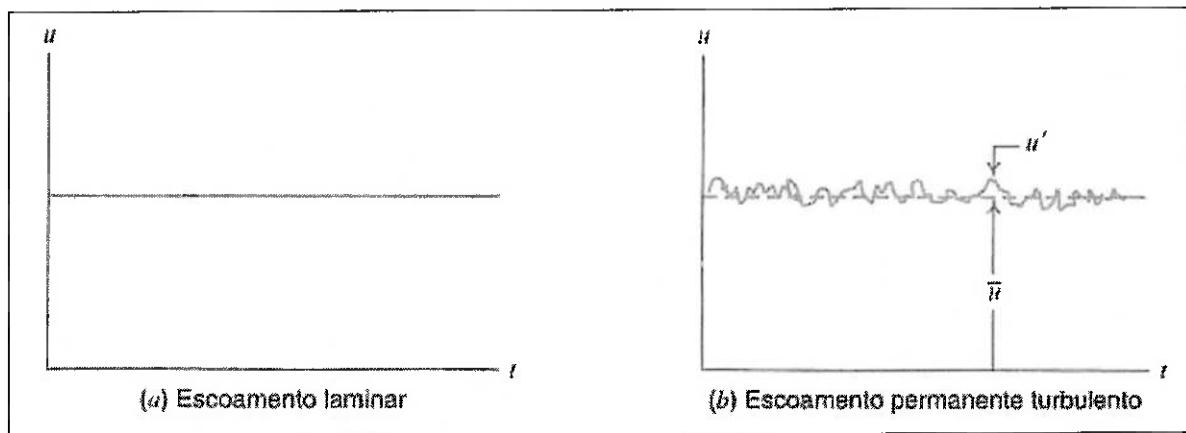
### 3.1.8. Escoamento Laminar e Turbulento

Os regimes de escoamentos viscosos são classificados em laminar ou turbulento, tendo por base sua estrutura. No regime laminar, a estrutura do escoamento é caracterizada pelo movimento suave em lâminas ou camadas. A estrutura do escoamento no regime

turbulento é caracterizada por movimentos tridimensionais aleatórios de partículas fluidas, em adição ao movimento médio.

No escoamento laminar não há mistura macroscópica de camadas adjacentes ao fluido. Em um escoamento turbulento essas camadas adjacentes acabam se interferindo entre si, fenômeno causado pelas flutuações de velocidades presentes.

Pode-se obter um quadro mais quantitativo da diferença entre os escoamentos laminar e turbulento examinando-se a saída de um dispositivo sensível, medidor de velocidade, imerso no fluxo. Se medirmos a componente  $x$  da velocidade num ponto fixo de um tubo, tanto para escoamento laminar quanto para turbulento, ambos permanentes, os registros gráficos da velocidade *versus* tempo aparecerão como na Figura 7.



**Figura 7** Variação da velocidade axial com o tempo.

Para o escoamento laminar, a velocidade num ponto permanece constante com o tempo. No turbulento, o gráfico da velocidade indica flutuações aleatórias da velocidade instantânea,  $u$ , em torno da velocidade média  $\bar{u}$ . Podemos considerar a velocidade instantânea,  $u$ , como a soma da velocidade média,  $\bar{u}$ , e a componente flutuante,  $u'$ .

$$u = \bar{u} + u'$$

Como o escoamento é permanente, a velocidade média,  $\bar{u}$ , não varia com o tempo.

Embora muitos escoamentos turbulentos sejam permanentes na média, a presença das flutuações aleatórias torna sua análise extremamente difícil.

Num escoamento unidimensional laminar, vale a seguinte relação,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

mas para um escoamento turbulento em que o campo de velocidade média é unidimensional, esta relação simples não é mais válida. Flutuações aleatórias e tridimensionais de velocidade ( $u'$ ,  $v'$  e  $w'$ ) transportam quantidade de movimento através das linhas de corrente do escoamento médio, aumentando a tensão de cisalhamento efetiva.

No escoamento turbulento não há relação simples entre o campo de tensões de cisalhamento e o campo de velocidade média. Flutuações de velocidade no escoamento turbulento resultam no transporte de quantidade de movimento entre camadas adjacentes de fluido. Essa transferência de quantidade de movimento pode ser vista como uma força por unidade de área, uma tensão aparente, que deve ser adicionada à tensão causada pelos gradientes da velocidade média.

### 3.2. Enfoque Diferencial

O enfoque integral nas equações básicas da mecânica dos fluidos é particularmente útil quando estamos interessados no comportamento genérico de um campo de escoamento e nos seus efeitos sobre dispositivos quaisquer. Contudo, o método de aproximação integral não nos capacita a obter conhecimentos ponto a ponto do campo de escoamento.

Para obter esse conhecimento de forma detalhada, devemos aplicar as equações dos movimentos dos fluidos na forma diferencial. Nesta parte, desenvolveremos equações diferenciais para a conservação da massa e a segunda lei de Newton. Como temos interesse na formulação de equações diferenciais, a nossa análise será em termos de sistemas e volumes de controle infinitesimais.

#### 3.2.1. A conservação da massa

Verificamos que a hipótese do contínuo levava diretamente a uma representação de campo das propriedades dos fluidos. Os campos de propriedades são definidos por funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. Os campos da massa específica e da velocidade são relacionados através da conservação da massa. Deduziremos a equação diferencial para a conservação da massa em coordenadas retangulares, aplicando a lei de conservação da massa a um volume de controle diferencial.

O volume de controle escolhido é um cubo infinitesimal com lados de comprimento  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , conforme mostrado na Figura 8.

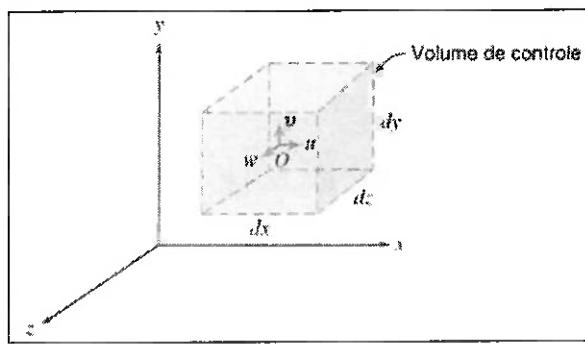


Figura 8 Volume de controle diferencial.

A massa específica no centro,  $O$ , do volume de controle é  $\rho$  e a velocidade é  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ .

A fim de avaliar as propriedades em cada uma das seis faces da superfície de controle, usaremos uma expansão em série de Taylor em relação ao ponto  $O$ . Por exemplo, na face direita,

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} + \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2!} \left( \frac{dx}{2} \right)^2 + \dots$$

Desprezando os termos de ordem superior, podemos escrever

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}$$

e

$$u_{x+dx/2} = u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}$$

onde  $\rho$ ,  $u$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  são todos avaliados no ponto  $O$ . Os termos correspondentes na face esquerda são

$$\rho_{x-dx/2} = \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( -\frac{dx}{2} \right) = \rho - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}$$

$$u_{x-dx/2} = u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( -\frac{dx}{2} \right) = u - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}$$

O enunciado da conservação da massa diz que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle somada com a taxa de variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual a zero.

A fim de avaliar o primeiro termo dessa equação, devemos avaliar  $\int_S \rho \vec{V} \cdot dA$ ; temos

que considerar o fluxo de massa através de cada uma das seis faces da superfície de controle. Os detalhes dessa avaliação são mostrados a seguir.

$$Esquerda(-x) = - \left[ \rho - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[ u - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dy \cdot dz$$

Simplificando a expressão, ficamos com

$$Esquerda(-x) = -\rho u \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

Analogamente, podemos deduzir os fluxos de massa através das outras cinco superfícies:

$$Direita(+x) = \rho u \cdot dy \cdot dz + \frac{1}{2} \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Inferior(-y) = -\rho v \cdot dx \cdot dz + \frac{1}{2} \left[ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Superior(+y) = \rho v \cdot dx \cdot dz + \frac{1}{2} \left[ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Posterior(-z) = -\rho w \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{2} \left[ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Frontal(+z) = \rho w \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{2} \left[ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz$$

Então,

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot dA = \left\{ \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \left[ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \left[ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

ou

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot dA = \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz$$

As velocidades através de cada face foram admitidas como estando nos sentidos positivos dos eixos coordenados. Termos de ordem superior foram desprezados.

Vemos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

$$\left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume,  $\rho$ , pelo volume,  $dx dy dz$ . Então, a taxa de variação de massa dentro do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Portanto, a equação diferencial para conservação da massa é então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

A equação acima é comumente chamada de *equação da continuidade*.

Uma vez que o operador matemático,  $\nabla$  é dado por

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V}$$

e a conservação da massa pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Para escoamentos em regime permanente, todas as propriedades dos fluidos são, por definição, independentes do tempo; assim  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Dessa forma, a equação da continuidade pode ser escrita como

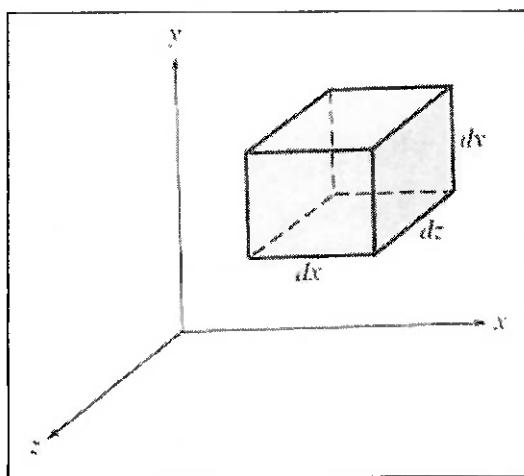
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Ou de uma forma mais simplificada

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

### 3.2.2. Movimento de um elemento fluido

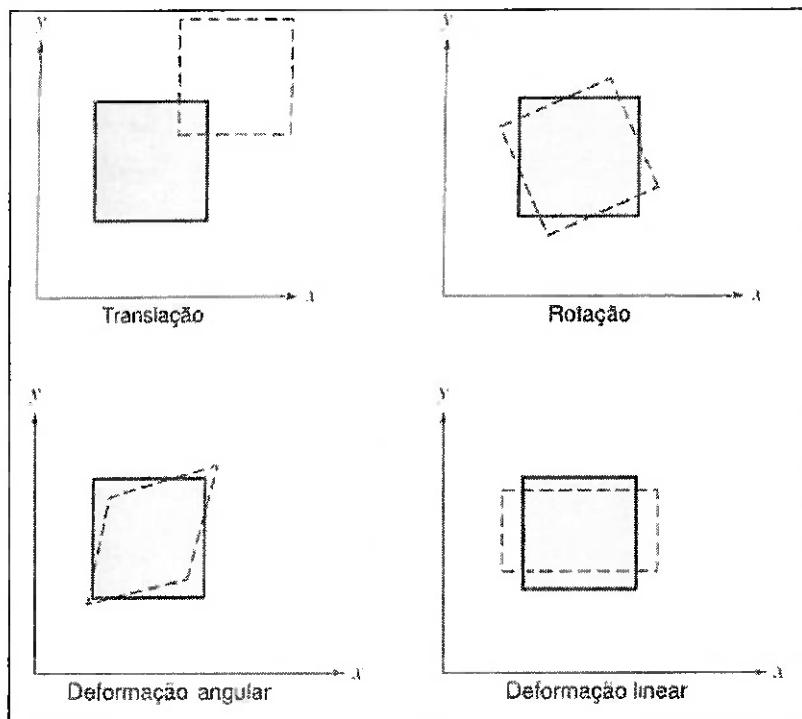
Antes de formular os efeitos de forças sobre o movimento dos fluidos, vamos considerar primeiro o movimento de um elemento fluido num campo de escoamento. Por conveniência, seguimos um elemento infinitesimal de identidade fixa (massa), como mostrado na Figura 9.



**Figura 9** Elemento infinitesimal de fluido.

À medida que o elemento infinitesimal de massa,  $dm$ , move-se no campo de escoamento, diversas coisas podem lhe acontecer. Certamente o elemento translada; ele desloca linearmente de um ponto  $x, y, z$  para um diferente,  $x_1, y_1, z_1$ . O elemento também pode girar; a sua orientação, como mostrado na Figura 9, onde seus lados estão paralelos aos eixos de coordenadas,  $x, y, z$ , pode mudar como resultado de uma rotação pura em torno de qualquer um dos eixos coordenados. Além disso, o elemento pode deformar-se. A deformação pode ser subdividida em duas partes – linear e angular. A primeira envolve uma mudança da forma sem mudanças na orientação do elemento: uma deformação na qual os planos do elemento que eram originalmente perpendiculares entre si (por exemplo, o topo e o lado do elemento) permanecem perpendiculares. A deformação angular envolve uma distorção do elemento na qual os planos que eram originalmente perpendiculares não mais permanecem perpendiculares. Em geral, um elemento fluido pode sofrer uma combinação de translação, rotação e deformações no curso do seu movimento.

Essas quatro componentes do movimento dos fluidos são ilustradas na Figura 10, para o movimento no plano  $xy$ .



**Figura 10** Representação gráfica dos componentes do movimento de fluido.

Para um escoamento genérico tridimensional, movimentos similares da partícula seriam observados nos planos  $yz$  e  $xz$ . Para translação ou rotação pura, o elemento fluido mantém a sua forma; não há deformação. Desse modo, tensões de cisalhamento não surgem como resultado de translação ou rotação pura. Consideremos separadamente translação, rotação e deformação do fluido.

### 3.2.2.1. Translação de Fluido

Uma descrição geral da aceleração pode ser obtida considerando-se uma partícula em movimento num campo de velocidade. A hipótese básica da mecânica dos fluidos do contínuo levou-nos a uma descrição do campo de escoamento no qual as propriedades desse são definidas por funções contínuas das coordenadas espaciais e do tempo. Em particular, o campo de velocidade é dado por  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ . A descrição de campo é muito poderosa, já que informações para todo o escoamento são fornecidas por uma única equação.

O problema, então, consiste em reter a descrição de campo para a propriedades do fluido e obter uma expressão para a aceleração de uma partícula à medida que ela se move num campo de escoamento. Enunciado de modo simples, o problema é:

Dado o campo de velocidade,  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ , determine a aceleração de uma partícula fluida,  $\vec{a}_p$ .

Considere uma partícula movendo-se num campo de velocidade. No instante  $t$ , a partícula está na posição  $x, y, z$  e tem uma velocidade correspondente à velocidade naquele ponto no espaço, nesse instante,

$$\vec{V}_{p|t} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Em  $t + dt$ , a partícula moveu-se para uma nova posição, com coordenadas  $x + dx, y + dy, z + dz$ , e tem uma velocidade dada por

$$\vec{V}_{p|t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Isto é mostrado na Figura 11.

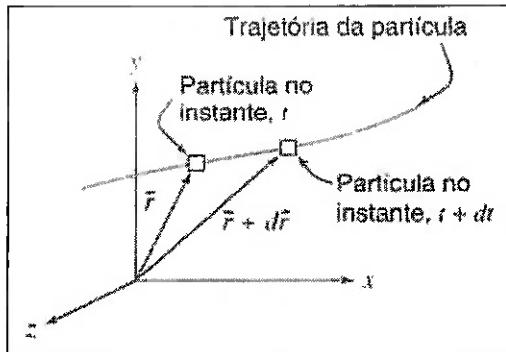


Figura 11 O movimento de uma partícula num campo de escoamento.

A velocidade da partícula em  $t$  (posição  $\vec{r}$ ) é dada por  $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$ . Então  $d\vec{V}_p$ , a variação da velocidade da partícula, ao mover-se da posição  $\vec{r}$  para  $\vec{r} + d\vec{r}$ , é dada por

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

A aceleração total da partícula é dada por

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Como

$$\frac{dx_p}{dt} = u \quad \frac{dy_p}{dt} = v \quad \frac{dz_p}{dt} = w$$

temos

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para lembrarmo-nos de que o cálculo da aceleração de uma partícula fluida num campo de velocidade requer uma derivada especial, ela recebe o símbolo  $D\vec{V}/Dt$ . Assim,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{I})$$

A derivada,  $D\vec{V}/Dt$ , definida acima é usualmente chamada de derivada substancial, para nos lembrar de que é calculada para uma partícula de “substância”. É também frequentemente chamada de derivada material ou de derivada de partícula.

A partir da equação (I) reconhecemos que uma partícula fluida movendo-se num campo de escoamento pode sofrer aceleração por dois motivos. Ela pode ser acelerada porque é transportada por convecção para um a região de velocidade mais alta (ou mais baixa). Por exemplo, no escoamento permanente através de um bocal, por definição, o campo de velocidade não é uma função do tempo, uma partícula acelerar-se-á enquanto se move através do bocal. Ela é transportada para uma região de velocidade mais alta. Se um campo de escoamento é não permanente, uma partícula fluida passará por uma aceleração adicional “local”, pois o campo de velocidade é função do tempo.

O significado físico dos termos da equação (I) é

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \text{aceleração total da partícula}$$

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \text{aceleração convectiva}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \text{aceleração local}$$

A aceleração convectiva pode ser escrita como uma única expressão vetorial utilizando-se o operador vetorial gradiente,  $\nabla$ .

Assim,

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Portanto, a equação (I) pode ser escrita simplesmente como

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_p = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Para um escoamento tridimensional em regime permanente, a equação (I) fica,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

que não é necessariamente zero. Assim, uma partícula fluida pode estar sujeita a uma aceleração convectiva devido ao seu movimento, mesmo num campo de velocidade constante.

Podemos ainda escrever a equação (I) com suas componentes escalares.

$$\vec{a}_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\vec{a}_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\vec{a}_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

### 3.2.2.2. Rotação de um Fluido

Uma partícula movendo-se num escoamento tridimensional genérico pode girar em torno de todos os três eixos coordenados. Então, a rotação da partícula é uma quantidade vetorial e, em geral,

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

onde  $\omega_x$  é a rotação em torno de eixo  $x$ ,  $\omega_y$  é a rotação em torno de eixo  $y$  e  $\omega_z$  é a rotação em torno de eixo  $z$ . O sentido positivo de rotação é dado pela regra da mão direita.

Para avaliar as componentes do vetor rotação de uma partícula, nós definimos a velocidade angular sobre um eixo como a velocidade angular média de dois segmentos diferenciais de linha inicialmente perpendiculares entre si, em um plano perpendicular ao eixo considerado. Dessa forma, a componente da rotação sobre o eixo  $z$  é igual a velocidade angular média de dois segmentos infinitesimais de linha, inicialmente perpendiculares entre si no plano  $xy$ .

A fim de obter uma expressão matemática para  $\omega_z$ , considere o movimento de um elemento fluido no plano  $xy$ . As componentes da velocidade em cada ponto no campo de escoamento são dadas por  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ . A rotação de um elemento fluido em tal campo é ilustrada na Figura 12.

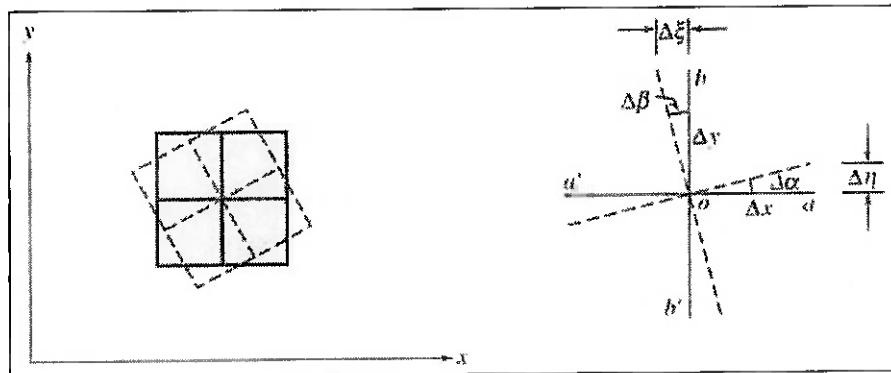


Figura 12 Rotação de um elemento.

As duas linhas perpendiculares,  $oa$  e  $ob$ , girarão para as posições mostradas durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , somente se as velocidades nos pontos  $a$  e  $b$  forem diferentes da velocidade em  $o$ .

Consideremos primeiro a rotação da linha  $ao$ , de comprimento  $\Delta x$ . A rotação dessa linha deve-se a variações da componente  $y$  da velocidade. Se a componente  $y$  da velocidade no ponto  $o$  for tomada como  $v_o$ , então a componente  $y$  da velocidade no ponto  $a$  pode ser escrita, usando-se uma expansão em série de Taylor, como

$$v = v_o + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

A velocidade angular da linha  $oa$  é dada por

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \eta / \Delta x}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\partial v / \partial x) \Delta x \Delta t / \Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

A velocidade angular da linha  $ob$  é obtida de forma análoga. A rotação do segmento de linha  $ob$ , de comprimento  $\Delta y$ , resulta de variações na componente  $x$  da velocidade. Se a componente  $x$  da velocidade no ponto  $o$  for tomada como  $u_o$ , então a componente  $x$  da velocidade no ponto  $b$  pode ser escrita como

$$u = u_o + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

A velocidade angular da linha  $ob$  é dada por

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi / \Delta y}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-(\partial u / \partial y) \Delta y \Delta t / \Delta y}{\Delta t} = -\frac{\partial y}{\partial y}$$

(O sinal negativo foi introduzido para dar um valor positivo a  $\omega_{ob}$ . De acordo com a regra da mão direita, a rotação anti-horária é positiva.)

A rotação do elemento fluido em torno do eixo  $z$  é a velocidade angular média de quaisquer duas linhas perpendiculares entre si,  $oa$  e  $ob$ , no plano  $xy$ . Então,

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Considerando-se a rotação de um par de linhas perpendiculares nos planos  $yz$  e  $xz$ , pode-se demonstrar de forma similar que

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Então  $\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$ , torna-se

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \hat{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

Reconhecemos o termo entre colchetes como

$$\operatorname{curl} \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Então, em notação vetorial, podemos escrever

$$\vec{\omega} = \frac{\nabla \times \vec{V}}{2} \quad (\text{II})$$

Uma partícula fluida movendo-se, sem rotação, num campo de escoamento, não pode desenvolver rotação sob a ação de uma força de campo ou de forças normais superficiais (de pressão). O desenvolvimento de rotação numa partícula fluida, inicialmente sem rotação, requer a ação de uma tensão de cisalhamento na superfície da partícula. Uma vez que essa tensão é proporcional à taxa de deformação angular, concluímos que uma partícula inicialmente desprovida de rotação não a desenvolverá sem uma simultânea deformação angular. A tensão de cisalhamento é relacionada com a taxa de deformação angular pela viscosidade. A presença de forças viscosas significa que o escoamento é rotacional.

A condição de irrotacionalidade pode ser uma hipótese válida para aquelas regiões de um escoamento em que essas forças viscosas são desprezíveis. Um exemplo claro disso é a região fora da camada limite no escoamento sobre uma superfície sólida.

O fator  $\frac{1}{2}$  pode ser eliminado na equação (II) definindo-se uma grandeza chamada *vorticidade*,  $\vec{\zeta}$ , como sendo duas vezes o valor da rotação,

$$\vec{\zeta} \equiv 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

### 3.2.2.3. Deformação Angular

A deformação angular de um elemento fluido envolve variações no ângulo entre duas linhas mutuamente perpendiculares no fluido.

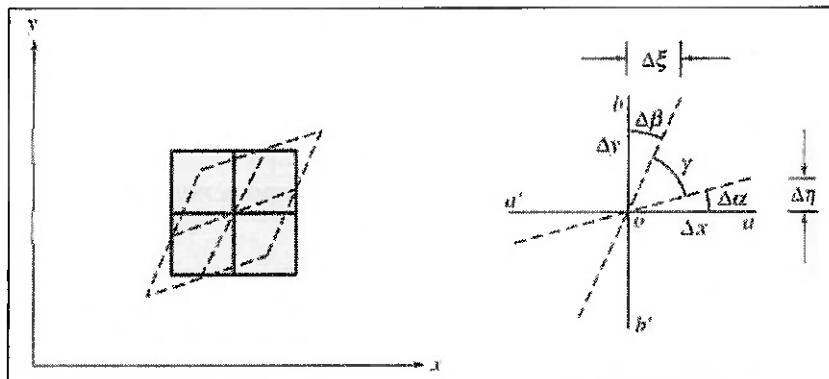


Figura 13 Deformação angular de um elemento fluido.

Na Figura 13 notamos que a taxa de deformação angular do elemento fluido no plano  $xy$  é a taxa de decréscimo do ângulo  $\gamma$  entre as linhas  $oa$  e  $ob$ . Visto que durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\Delta\gamma = \gamma - 90^\circ = -(\Delta\alpha + \Delta\beta)$ , a taxa de deformação angular é dada por

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

Mas,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\eta/\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\Delta t/\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{d\beta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\xi/\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\partial u/\partial y)\Delta y\Delta t/\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Consequentemente, a taxa de deformação angular no plano  $xy$  é

$$-\dot{\gamma} = -\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

A tensão de cisalhamento relaciona-se com a taxa de deformação angular através da viscosidade do fluido. Num escoamento viscoso (onde gradientes de velocidade estão presentes), é altamente improvável que  $\partial v / \partial x$  seja igual e oposta a  $\partial u / \partial y$  em todo o campo do escoamento. A presença de forças viscosas significa que o escoamento é rotacional.

### 3.2.2.4. Deformação Linear

Durante a deformação linear, a forma de um elemento fluido, descrita pelos ângulos de seus vértices, permanece imutável, visto que todos os ângulos retos continuam a sê-lo. O elemento irá variar de comprimento na direção  $x$  apenas se  $\partial u / \partial x$  for diferente de zero. Analogamente, uma mudança na dimensão  $y$  exige um valor diferente de zero para  $\partial v / \partial y$ , e uma mudança na dimensão  $z$  exige um valor diferente de zero para  $\partial w / \partial z$ . Essas quantidades representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Mudanças no comprimento das faces podem produzir alterações no volume do elemento. A taxa local, instantânea, de dilatação volumétrica é dada por

$$\text{Taxa de dilatação volumétrica} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

Para escoamento incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é zero.

### 3.2.3. Equação da Quantidade de Movimento

Uma equação dinâmica descrevendo o movimento do fluido pode ser obtida aplicando-se a Segunda Lei de Newton a uma partícula. Para deduzir a forma diferencial da equação da quantidade de movimento, aplicaremos a Segunda Lei de Newton a uma partícula fluida infinitesimal de massa  $dm$ .

Lembremos que a Segunda Lei de Newton para um sistema é dada por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Bigg|_{sistema}$$

onde a quantidade de movimento,  $\vec{P}$ , do sistema, é dada por

$$\vec{P}_{sistema} = \int_{massa(sistema)} \vec{V} \cdot dm$$

Então, para um sistema infinitesimal de massa  $dm$ , a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$d\vec{F} = dm \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{sistema}$$

Tendo obtido uma expressão para a aceleração de um elemento fluido de massa  $dm$  movendo-se num campo de velocidade podemos escrever a Segunda Lei de Newton como a equação vetorial

$$d\vec{F} = dm \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \quad (III)$$

Precisamos agora obter uma formulação adequada para a força,  $d\vec{F}$ , ou suas componentes,  $dF_x$ ,  $dF_y$  e  $dF_z$ , atuando sobre o elemento.

### 3.2.3.1. Forças atuando sobre a partícula

Lembre-se que as forças que atuam sobre um elemento fluido podem ser classificadas como de campo ou de superfície; as de superfície incluem tanto as normais quanto as tangenciais (de cisalhamento).

Consideremos a componente  $x$  da força agindo sobre um elemento diferencial de massa  $dm$  e volume  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ . Apenas aquelas tensões que atuam na direção  $x$  darão origem a forças superficiais na direção  $x$ . Se as tensões no centro do elemento diferencial forem tomadas como  $\sigma_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ , as tensões atuantes na direção  $x$  em cada face do elemento (obtidas por um desenvolvimento em série de Taylor em relação ao centro do elemento) são conforme mostrado na Figura 14.

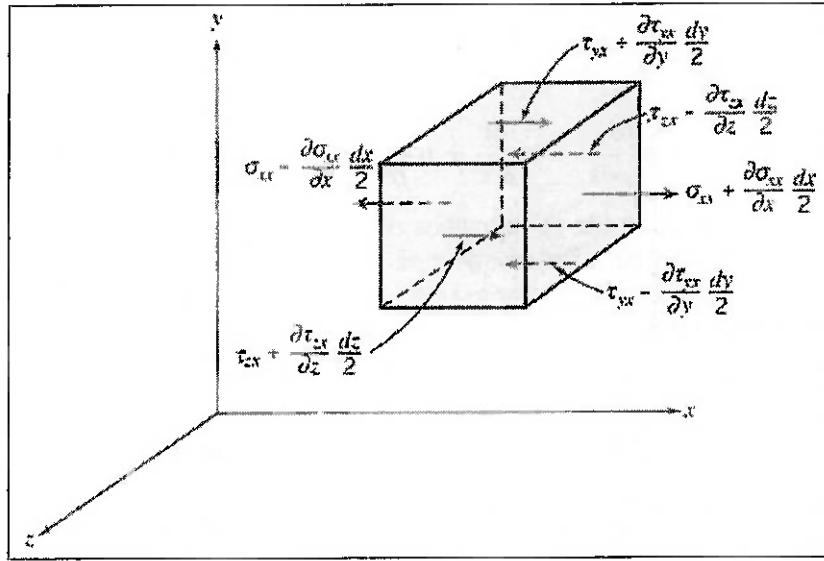


Figura 14 Tensões na direção  $x$  sobre um elemento fluido.

Para obter a força de superfície líquida na direção  $x$ ,  $dF_{S_x}$ , devemos somar as forças nessa direção. Então,

$$\begin{aligned}
 dF_{S_x} = & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz - \left( \sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz \\
 & + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \cdot dz - \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \cdot dz \\
 & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy
 \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$dF_{S_x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

Quando a força da gravidade é a única força de campo atuante, então a força de campo por unidade de massa é igual a  $\bar{g}$ . A força líquida na direção  $x$ ,  $dF_x$ , é dada por

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left( \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{IVa})$$

Pode-se deduzir expressões similares para as componentes da força nas direções  $y$  e  $z$ :

$$dF_y = dF_{B,y} + dF_{S,y} = \left( \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (\text{IVb})$$

$$dF_z = dF_{B,z} + dF_{S,z} = \left( \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (\text{IVc})$$

### 3.2.3.2. Equação Diferencial da Quantidade de Movimento

Formulamos expressões para as componentes,  $dF_x$ ,  $dF_y$  e  $dF_z$ , da força  $d\vec{F}$ , atuante sobre o elemento de massa,  $dm$ . Se substituirmos nossas expressões (IV) nas componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da equação (III), obteremos as equações diferenciais do movimento,

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

As equações acima são as equações diferenciais do movimento de qualquer partícula fluida que satisfaça a hipótese do contínuo. Antes que elas possam ser usadas na solução de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , devem ser obtidas expressões adequadas para as tensões, em termos do campos de velocidade e de pressão.

### 3.2.3.3. Fluidos Newtonianos: Equações de Navier-Stokes

Para um fluido Newtoniano, a tensão viscosa é proporcional à taxa de deformação por cisalhamento (taxa de deformação angular). As tensões podem ser expressas em termos dos gradientes de velocidade e das propriedades dos fluidos como segue:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

onde  $p$  é a pressão termodinâmica local. A pressão termodinâmica é relacionada com a densidade e temperatura pela relação termodinâmica usualmente chamada de equação de estado.

Se essas expressões forem introduzidas nas equações diferenciais do movimento, obteremos:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$

Estas equações do movimento são chamadas de equações de Navier-Stokes.

### 3.3. Conceitos Básicos do Escoamento Externo

#### 3.3.1. Arrasto

O arrasto é a componente da força sobre um corpo agindo paralelamente à direção do movimento.

O coeficiente de arrasto,  $C_D$ , é definido como:

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

onde  $F_D$  é a força de arrasto,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $V$  é a velocidade do escoamento e  $A$  é a área característica do corpo em questão.

#### 3.3.2. Sustentação

A sustentação é a componente da força aerodinâmica perpendicular ao movimento do fluido.

O coeficiente de sustentação,  $C_L$ , é definido como:

$$C_L \equiv \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

onde  $F_L$  é a força de sustentação,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $V$  é a velocidade do escoamento e  $A$  é a área característica do corpo em questão.

## 4. FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

### 4.1. Aspectos Gerais

A base da teoria apresentada nas seções seguintes foi extraída das referências [4] e [5], e devem ser consultadas por aqueles que desejarem se aprofundar um pouco mais nos conhecimentos aqui expostos.

A dinâmica dos fluidos computacional resolve basicamente as equações mostradas a seguir:

*Equação da Continuidade*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

*Equação da Quantidade de Movimento*

$$\text{Direção } x: \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\text{Direção } y: \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\text{Direção } z: \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

*Equação de Estado*

$$p = f(\rho, T)$$

*Equação para Efeitos Térmicos ou de Compressibilidade*

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi - p \operatorname{div}(\vec{v})$$

onde  $\Phi$  é a função dissipação, dada por

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\vec{v})$$

Portanto, procuramos resolver essas equações de tal forma que as variáveis  $\rho, u, v, w, p, T$  sejam completamente determinadas, para o campo de escoamento estudado.

A partir das equações mencionadas acima, pode-se escrever a equação geral do método dos volumes finitos, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \operatorname{div}(\rho\phi\vec{v}) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) + S$$

onde  $\phi$  pode ser qualquer uma das variáveis a ser determinadas, ou seja, pode ser  $\rho, u, v, w, p, T$ .

A equação acima pode ser interpretada da seguinte maneira:

Taxa de variação de $\phi$ (Termo transiente)	+	Taxa de convecção de $\phi$ no volume de controle	=	Taxa de variação de $\phi$ devido a difusão	+	Variação de $\phi$ devido a presença de fontes
--	---	---	---	---	---	--

**Figura 15** Interpretação da equação geral do método dos volumes finitos.

A tabela abaixo ilustra melhor as opções de  $\Gamma$ ,  $\phi$  e  $S$ .

Equação de conservação	$\phi$	$\Gamma$	$S\phi$
Massa global	1	0	0
Quantidade de movimento em x	u	$\mu$	$B_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial P}{\partial x}$
Quantidade de movimento em y	v	$\mu$	$B_y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}$
Quantidade de movimento em z	w	$\mu$	$B_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z}$
Energia	T	$k/c_p$	$\frac{1}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu}{c_p} \Phi$
Massa de um componente	C	$\rho D$	0

Tabela 1 Valores de  $\phi$ ,  $\Gamma$  e  $S\phi$ .

Adicionados o efeito de turbulência descritos no item 3.1.8 a nova equação da Quantidade de Movimento tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{\rho u_i' u_j'} \right)$$

onde o termo  $-\overline{\rho u_i' u_j'}$  é conhecido como tensão de Reynolds.

Esse termo pode ser modelado através da aproximação de Boussinesq, representada por:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij}$$

## 4.2. O método dos volumes finitos

O Método dos Volumes Finitos (MVF) foi desenvolvido para a análise de problemas complexos de Mecânica dos Fluidos. As equações são obtidas através da realização de balanços da propriedade em questão (seja ela massa, quantidade de movimento, entalpia, etc.) nos volumes elementares, ou volumes finitos, ou então; integrando sobre um volume elementar, no espaço e no tempo.

O fato das equações aproximadas representarem à conservação no âmbito de volumes elementares vem do fato que a solução da equação diferencial (por exemplo: Equação de Navier-Stokes) representa a conservação da propriedade num âmbito de ponto (infinitesimal).

Para obter a solução é utilizada uma técnica de volume de controle que consiste:

- Divisão do domínio contínuo em volumes de controles discretos usando a malha computacional;
- Integração das equações nos volumes de controle individuais para construir equações algébricas para as variáveis discretas dependentes, tais como: velocidades e temperatura;
- Linearização das equações discretas e solução do sistema de equações lineares resultante para produzir valores atualizados das variáveis independentes.

A integração das equações diferenciais será mostrada para um conjunto de equações unidimensionais, sendo que estas podem ser facilmente estendidas para o caso bidimensional ou tridimensional. Sejam as equações diferenciais para continuidade, quantidade de movimento e quantidade escalar  $\phi$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \operatorname{div}(\rho\phi\vec{v}) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) + S$$

Essas equações podem ser integradas em relação ao volume de controle empregando o Teorema da Divergência:

$$\int_{volum,y} \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) dV = \int_A (\rho \cdot u) \cdot dA$$

A integração das três equações acima nos dá os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{M_p - M_p^0}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w &= 0 \\ \dot{M}_e \cdot u_e - \dot{M}_w \cdot u_w &= -(p_e - p_w)A + \left[ \frac{\mu_e}{\Delta x_e}(\mu_e - \mu_p) - \frac{\mu_w}{\Delta x_w}(\mu_p - \mu_w) \right]A + S_\phi \\ M_e \cdot \phi_e - M_w \cdot \phi_w &= \left( \Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x_w} \right)A + S_\phi \cdot \Delta V \end{aligned}$$

As equações acima obtidas são equações algébricas que podem ser resolvidas dado que as variáveis indeterminadas ( $u$ ,  $p$  e  $\phi$ ) são interpoladas de uma maneira que relaciona seus valores nas faces do volume de controle aos valores no centro do volume de controle. O Procedimento de discretização se baseia no esquema ilustrado na Figura 16.

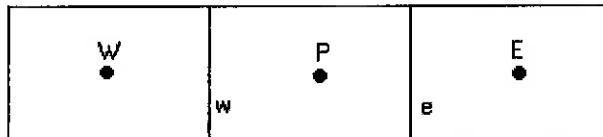


Figura 16 Esquema dos volumes de controle para discretização.

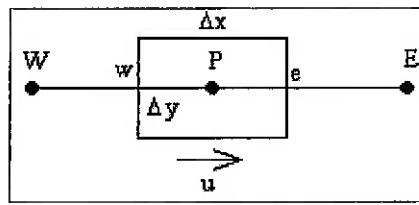
A solução das equações expressas acima requerem: o cálculo da pressão nas faces do volume de controle ( $p_e$ ,  $p_w$ ), que se determine o fluxo nas faces ( $M_e$ ,  $M_w$ ), e a interpolação para relacionar os valores nas faces com os valores das incógnitas ( $u$  e  $\phi$ ) com os valores nos centros dos volumes de controle.

Os fluxos nas faces são obtidos de tal forma que as velocidades nas faces obedecem a um balanço médio do momento. Já as pressões nas faces são obtidas de tal forma que as velocidades armazenadas no centro da célula obedecem ao balanço de massa.

#### 4.2.1. Funções de interpolação para MVF

Ao discretizar uma equação de transporte que possua termos convectivos não nulos aparecerá, na equação discretizada, valores de  $\phi$  nas faces dos volumes de controle. Esses valores precisam ser interpolados entre os valores centrais dos volumes.

Tomando como exemplo um volume de controle unidimensional (direção x) e a seguinte equação de transporte:



**Figura 17** Volume de Controle unidimensional.

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

Integrando a equação acima no volume de controle resulta em:

$$M_e \cdot \phi_e - M_w \cdot \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) + D_w (\phi_w - \phi_P)$$

Onde:

Fluxos convectivos (vazão mássica):

$$M_e = \rho_e u_e \Delta y$$

$$M_w = \rho_w u_w \Delta y$$

Termos difusivos (viscosidade):

$$D_e = \Gamma_e \Delta y / \Delta x$$

$$D_w = \Gamma_w \Delta y / \Delta x$$

#### 4.2.1.1. UpWind de 1<sup>a</sup> ordem

A interpolação das variáveis nas faces é feita da seguinte forma:

$$\phi_e = \phi_P, \text{ se } M_e > 0; \phi_e = \phi_E, \text{ se } M_e < 0.$$

$$\phi_w = \phi_W, \text{ se } M_w > 0; \phi_w = \phi_P, \text{ se } M_w < 0.$$

A ordem de precisão deste método é de  $\Delta x$  (1<sup>a</sup> ordem).

#### 4.2.1.2. UpWind de 2<sup>a</sup> ordem

Para esse método, os valores da variável nas faces são calculados ponderando os valores centrais dos volumes vizinhos:

$$\phi_e = \frac{3}{2} \phi_P - \frac{1}{2} \phi_W$$

$$\phi_w = \frac{3}{2} \phi_W - \frac{1}{2} \phi_P$$

Após a aproximação numérica, chega-se a uma matriz de coeficientes que geralmente apresenta alto índice de esparsidade, torna-se então fundamental escolher apropriadamente o método de solução do sistema linear, para que essa solução não leve um tempo exagerado.

Quando se utilizam malhas não estruturadas, como no caso em questão, cada volume pode ter um número diferente de vizinhos, o que origina matrizes com uma banda diagonal variável, e não matrizes tri, penta ou heptagonais quando se utilizam malhas estruturadas. Isto torna os métodos de solução para sistemas lineares mais elaborados.

### 4.3. Geração de Malhas Não-Estruturadas

Existem vários métodos numéricos utilizados para a resolução de problemas em CFD. Entre eles está o método das diferenças finitas, método de elementos finitos, método espectral e método dos volumes finitos. Este último é utilizado nas simulações deste trabalho e terá uma descrição detalhada adiante. Todos estes métodos têm caráter “euleriano”, isto é, a análise é focada num espaço fixo em relação ao sistema de coordenadas adotado, e não na partícula. Desse modo, é necessário que se discretize o domínio do problema a fim de aplicarmos o método de resolução. É nisso que consiste a geração de malhas, da discretização do domínio em vários elementos de forma geral pré-determinada, com a finalidade de estabelecer a posição dos pontos (nós) para os quais serão calculadas as soluções pretendidas. A geração de malhas, a determinação das condições de contorno e condições iniciais e o ajuste dos parâmetros de solução constituem o que se costuma chamar de pré-processamento do problema.

A fase de geração de malhas é muito importante na medida em que a geração de uma malha válida num domínio com uma geometria complexa não é uma operação trivial e pode ter um custo bastante grande em termos de tempo de processamento. Além do mais, a criação de uma malha coerente com as características físicas do problema considerado é crucial, porque a qualidade da solução computada está fortemente relacionada com a qualidade da malha.

#### 4.3.1. Noções gerais relativas a malhas

Uma malha de um domínio,  $\Omega$ , é definida por um conjunto,  $T_h$ , que consiste de um número finito de segmentos em uma dimensão, segmentos, triângulos e quadriláteros em duas dimensões e os elementos anteriores mais tetraedros, pentaedros e hexaedros em três dimensões. Os elementos,  $K$ , de tal malha devem satisfazer um determinado número de propriedades que serão introduzidas a seguir. A primeira diz respeito à *conformidade*, de acordo com a definição:

**Definição:**  $T_h$  é uma malha conforme de  $\Omega$  se as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in T_h} K$ ;
2. Todos os elementos de  $T_h$  têm interior de área (no caso bidimensional) ou volume (no caso tridimensional) não nulo;
3. A interseção de dois elementos quaisquer de  $T_h$  se enquadra em um, e apenas um, dos seguintes casos:
  - Conjunto vazio;
  - Um ponto comum aos dois elementos;
  - Uma aresta comum aos dois elementos;
  - Uma face comum aos dois elementos.

Se  $T_h$  é uma malha conforme, então dizemos que ela representa  $\Omega$  de maneira conforme quanto a aspectos geométricos. Na prática,  $T_h$  é um particionamento de  $\Omega$ , tão preciso quanto possível. Quando  $\Omega$  não é um domínio poligonal (ou poliedral),  $T_h$  será apenas uma discretização aproximada do domínio.

Os elementos constituintes de uma malha devem geralmente satisfazer algumas propriedades específicas:

#### 4.3.1.1. Propriedades Geométricas

- A variação dimensional entre dois elementos adjacentes tem que ser progressiva e descontinuidades de elementos para elementos não podem ser muito abruptas.
- A densidade de elementos em regiões de gradientes elevados de alguma grandeza envolvida no problema deve ser alta.
- Quando os elementos são do tipo triangular, deve-se evitar a presença de ângulos obtusos nos elementos.
- Os elementos devem se adequar às características anisótropicas do problema.

#### 4.3.1.2. Propriedades de Natureza Física

Essas propriedades estão fortemente ligadas aos aspectos físicos do problema em consideração. A configuração geral e individual dos elementos deve ser definida de acordo com o comportamento do problema.

Existem numerosos algoritmos para a construção de malhas bidimensionais e tridimensionais. A escolha do método está fortemente ligada à geometria do domínio considerado. As malhas geradas podem ser agrupadas em duas classes principais: *malhas estruturadas* e *malhas não-estruturadas*. Uma malha é chamada de estruturada se sua conectividade é do tipo de diferenças finitas. Uma malha é chamada de não-estruturada se sua conectividade é de qualquer outro tipo. Por *conectividade* de uma malha entendemos a definição da conexão entre seus vértices, em outras palavras, a conexão entre os nós globais de uma malha e os nós locais de cada elemento da malha.

Elucidando melhor os conceitos: para uma malha estruturada, a conectividade entre os nós é do tipo  $(i, j, k)$ , isto é, assumindo que índices de um determinado nó sejam  $(i, j, k)$ , seu vizinho esquerdo terá os índices  $((i-1), j, k)$  e seu vizinho direito terá os índices  $((i+1), j, k)$ . Este tipo de malha é mais apropriado para geometrias simples e simétricas, tais como configurações quadrilaterais e hexaedrais. Para geometrias mais complexas, é necessário um tratamento especial para que este tipo de estruturação seja concebido. O presente trabalho lida com simulações que utilizam malhas não estruturadas, que por sua vez apresentam menos restrições geométricas, mas tem um custo computacional maior.

Podemos ainda dividir os diferentes algoritmos de geração de malha em sete classes:

***Métodos manuais ou semi-automáticos:*** adequados para geometrias relativamente simples. Estão nessa classe os métodos enumerativos, nos quais os pontos, arestas, faces e elementos que compõe a malha são dados explicitamente; e métodos apropriados para situações geométricas particulares, como formas cilíndricas e hexaedrais, os quais usam propriedades específicas da geometria explicitamente e a conectividade é conhecida “*a priori*”.

***Métodos que utilizam mapeamento:*** constroem a malha a partir do mapeamento, através de uma transformação conforme de um domínio, de uma malha de geometria simples.

***Métodos baseados na solução de um sistema de equações diferenciais a derivadas parciais:*** essa abordagem se assemelha à segunda, mas aqui a função de mapeamento não é dada a princípio, mas é computada a partir da resolução de equações diferenciais a derivadas parciais, de forma a satisfazer certas propriedades de interesse, tais como densidade de elementos e ortogonalidade.

***Métodos baseados na deformação e modificação local de uma malha:*** este método aplica-se principalmente a malhas de fácil obtenção, do tipo *quadtree*, em casos bidimensionais, ou *octree*, para casos tridimensionais. Nestes casos o domínio está encerrado num quadrilátero ou num paralelepípedo que é divido em subconjuntos na forma de caixas. Esses subconjuntos são construídos pela decomposição baseada em uma árvore quaternária (para dimensão 2) ou árvore octal (dimensão 3). A rede resultante é então utilizada para criar a malha desejada.

***Métodos que derivam à malha final, elemento por elemento, dos dados do contorno:*** basicamente existem duas abordagens: métodos de frente progressiva (“advancing front methods”) e algoritmos baseados na construção de Voronoï-Delaunay. Estes métodos criam nós internos e elementos, começando da fronteira do domínio. Esta fronteira pode ser dada de maneira global (por exemplo, definidos de forma analítica) ou de maneira discreta (como uma lista de arestas de faces triangulares). Esta classe de métodos é de particular interesse neste trabalho, pois é a que o software de geração de malhas utilizado (Gambit 2.0.4) emprega.

***Métodos que utilizam a composição de malhas de subconjuntos baseados na modificação geométrica ou topológica dessas malhas:*** neste caso, as malhas dos subconjuntos podem ser obtidas por qualquer um dos métodos anteriores. O problema é então dividido em um conjunto de “subproblemas” de menor complexidade, que são então resolvidos por uma ou mais classes das anteriormente citadas e o resultado final é então obtido por transformações e a adição dos resultados parciais.

Assim sendo, percebe-se que as principais diferenças entre os algoritmos de geração de malhas estão na generalidade do método, principalmente com relação à geometria, e a variedade, quantidade e forma dos dados que tem que ser fornecida ao algoritmo.

O estabelecimento da noção de malha de tal forma que esta seja conveniente em termos da computação futura precede a escolha do método geral de concepção da malha. Escolhido o método, existem diferentes maneiras pelas quais ele pode ser implementado.

#### *4.3.2. Descrição Geral*

Uma malha tem que ser descrita de acordo com a sua aplicação. No caso de simulações de escoamentos externos, que é o que ocorre neste trabalho, são necessárias as definições de objetos sólidos e da zona fluida que os circunda. Nesta definição deverão estar contidas todas as informações necessárias considerando os vários passos na computação. Estas informações incluem geometria, condições de contorno. Elas podem ser agrupadas em três tipos:

##### *4.3.2.1. Informação Geométrica*

Aqui se incluem a descrição da malha, ou seja, como seus elementos cobrem o domínio, e uma espécie de histórico que contenha toda a informação previamente utilizada na construção dos elementos. Também tem que estar descrito o tipo de elemento (segmento, triângulo, quadrilátero, tetraedro, pentaedro, hexaedro ou outro).

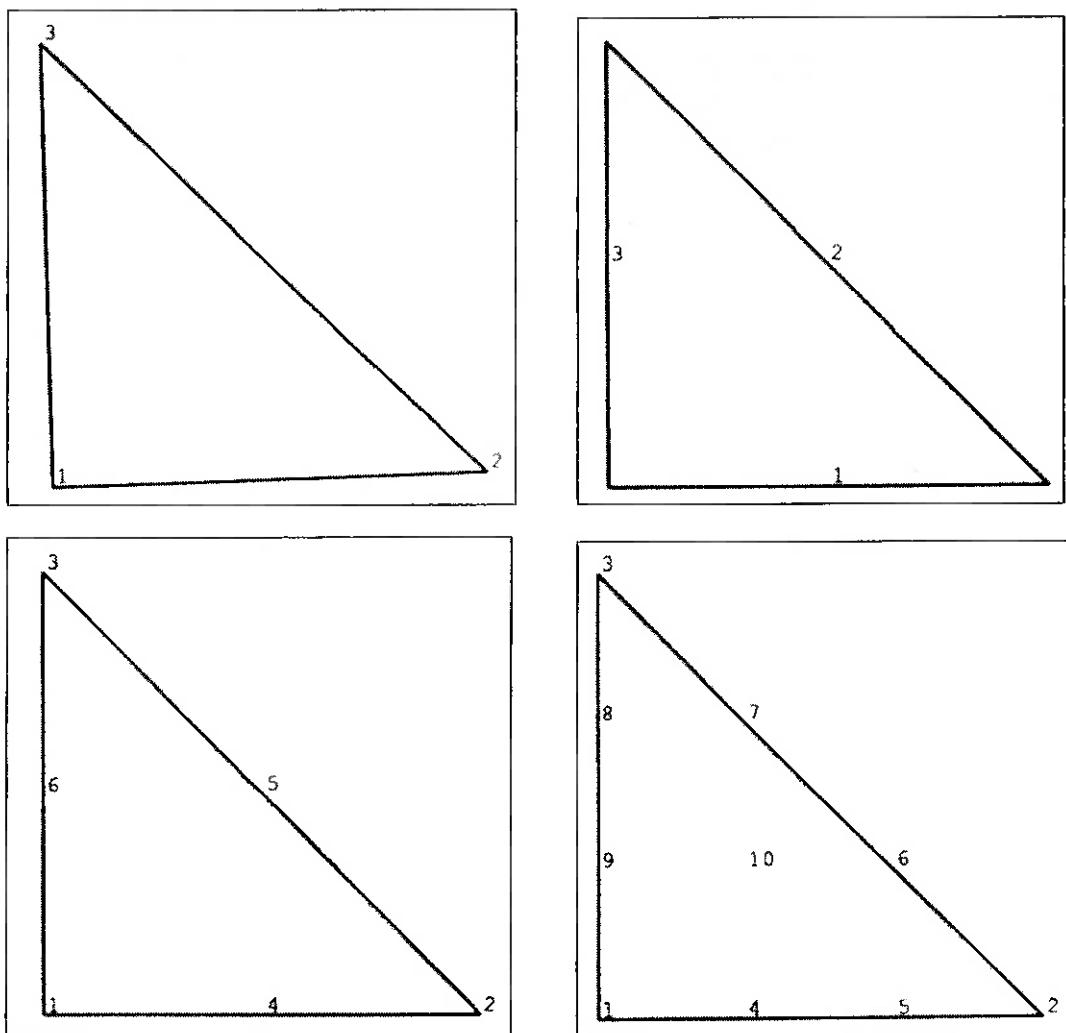
A maneira prática da descrição da malha se constitui na listagem dos vértices dos elementos, a conectividade, as coordenadas dos vértices e a topologia, que é a descrição das arestas e faces de um elemento pelos seus vértices.

##### *4.3.2.2. Informações Necessárias ao Processamento*

Encontram-se agrupados aqui os dados para computação das matrizes, solução dos sistemas e visualização dos resultados. Estas informações variam de acordo com o

algoritmo numérico utilizado para a resolução do problema. Exemplos são o número e a lista dos nós dos elementos.

É preciso frisar que os nós e os vértices de um elemento podem coincidir ou não. Podem existir nós intermediários localizados nas arestas, faces ou interior do elemento. Convenciona-se então uma ordem de numeração, de modo a simplificar a representação dos elementos. A seguir são dados quatro exemplos de elementos triangulares, com os respectivos nós numerados e indicados:



**Figura 18** Diferentes numerações dos nós de um elemento triangular.

#### 4.3.2.3. Informações Físicas

Nesta classificação estão as condições iniciais e de contorno e caracterização física dos elementos (material e propriedades, por exemplo).

#### 4.3.3. Metodologia Geral para Criação de Malhas

A concepção de uma malha pode ser decomposta em três passos:

- Análise do problema;
- Definição formal do processo de geração da malha;
- A construção da malha propriamente dita.

O primeiro passo consiste na análise da geometria do domínio e do problema físico a ser resolvido. Essa análise deve ser feita segundo uma metodologia *top-down*, ou seja, na decomposição de um problema complexo numa série de problemas mais simples.

A construção formal da malha, que constitui o segundo passo, leva em conta os resultados da análise efetuada no primeiro passo e é baseada numa construção *bottom-up*, que é a definição de objetos simples tornando a solução do problema completo possível através da soma das soluções dos objetos.

Por último, a construção da malha propriamente dita é feita através do uso de um algoritmo apropriado de geração de malhas e consiste de duas fases: a definição do conjunto de dados relevantes e a geração real da malha.

#### 4.3.4. Métodos de Frente Progressiva (Advancing Front Methods)

Aqui será feita uma introdução geral ao método empregado pelo software utilizado para gerar as malhas das simulações deste trabalho (Gambit 2.0.4). Esta classe de geradores de malhas foi desenvolvida entre as décadas de 70 e 80 e foi a primeira solução automática para a geração de malhas para domínios de geometrias arbitrárias. Basicamente, os algoritmos constroem a malha do domínio a partir da fronteira do mesmo. Os elementos utilizados são triângulos no caso bidimensional e tetraedros no caso tridimensional. Os dados demandados são as fronteiras do domínio ou, mais precisamente, sua discretização poligonal (para dimensão 2) descritos por uma lista de segmentos, ou sua discretização poliedral (para dimensão 3) descritos por uma lista de faces triangulares.

O processo é iterativo: uma frente, inicializada por um conjunto de itens da fronteira dada, é analisada a fim de estabelecer uma zona de partida, a partir da qual um ou mais elementos internos são criados; a frente é então atualizada e o processo de criação de elementos é repetido se a frente não for um conjunto vazio. O algoritmo pode ser sumariado da seguinte forma (veja também o esquema mostrado na Figura 19):

- Inicialização da frente;
- Análise da frente:
  - Determinação da zona de partida;
  - Análise da região:
    - Criação dos pontos internos e dos elementos internos;
    - Atualização da frente.
- Se a frente não for um conjunto vazio, voltar para “Análise da frente”.

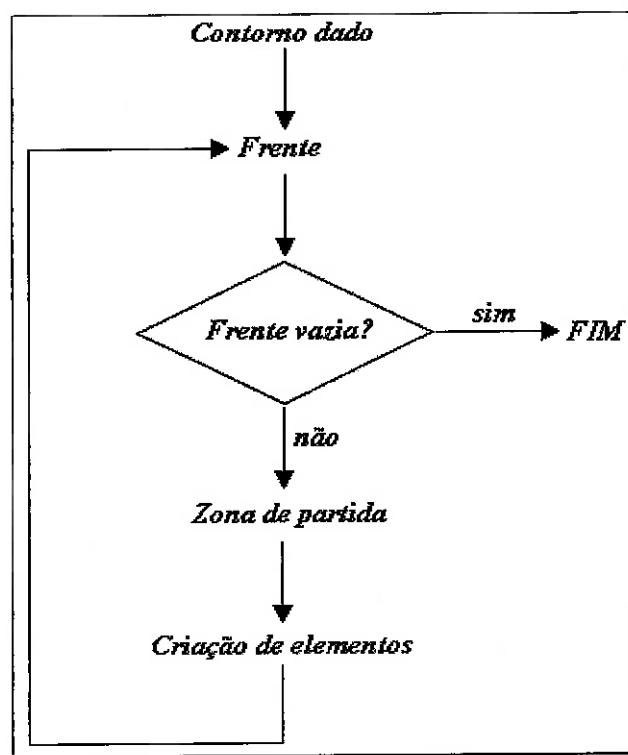


Figura 19 Esquema geral do método de frente progressiva.

A análise da frente e a criação dos elementos podem ser feitas de várias formas. Aqui serão descritas uma forma para o caso bidimensional e uma para o caso tridimensional. Logo após são introduzidas algumas extensões que servem para controlar a criação dos pontos internos e dos elementos, de tal maneira que a malha resultante tenha algumas características particulares, como elementos isotrópicos, elementos anisotrópicos, etc.

#### 4.3.4.1. Métodos de frente progressiva em duas dimensões

Como já foi exposto, este tipo de algoritmo constrói a malha do domínio  $\Omega$  com triângulos que partem do seu contorno. Na prática, uma aproximação poligonal do contorno é usada em termos de uma lista dos seus elementos constitutivos. O interior do domínio, ou seja, a zona a ser discretizada, está bem definida por causa da orientação do contorno servindo como dado de entrada. A frente inicial  $F$  é definida como o conjunto de segmentos da fronteira  $C$  descrevendo o domínio  $\Omega$ .

Dada  $F$ , pode-se detalhar a maneira pela qual os triângulos são criados. Enquanto o processo de criação dos triângulos internos progride, a fronteira  $C$  e a frente  $F$  são atualizadas. Considerando  $F$  o atual estado da frente, então sua análise é baseada no exame das propriedades geométricas dos seus elementos constituintes. Chamando de  $\alpha$  o ângulo formado por dois segmentos consecutivos da frente  $F$ , então são as três situações:

- $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , os dois segmentos com ângulo  $\alpha$  são mantidos e tornam-se dois lados do triângulo criado (Figura 20);

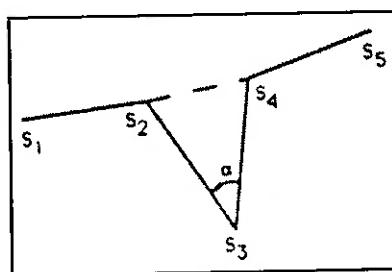


Figura 20 Padrão 1.

- $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ , dos dois segmentos com ângulo  $\alpha$ , um ponto interno e dois triângulos são gerados (Figura 21);

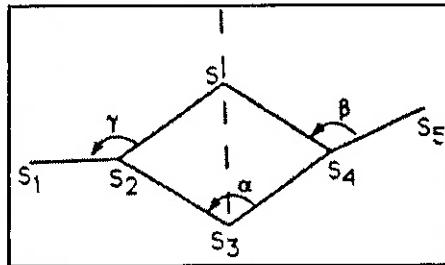


Figura 21 Padrão 2.

- $\frac{2\pi}{3} < \alpha$ , um segmento é mantido, um triângulo é criado com este segmento sendo um dos lados e um ponto interno (Figura 22);

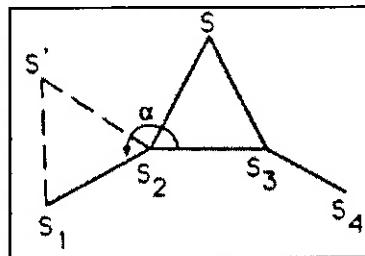


Figura 22 Padrão 3.

As posições dos pontos internos criados são definidas de forma que sejam ótimas, significando que os elementos que têm esses pontos como vértices sejam os mais regulares possíveis. No caso do padrão 2, o vértice é gerado na linha bissetriz do ângulo  $\alpha$  a uma distância computada a partir dos respectivos comprimentos das arestas da zona de partida: a localização deste ponto interno  $S$  é calculada pela fórmula:

$$d_{SS_3} = \frac{1}{6} (2d_{S_2S_3} + 2d_{S_3S_4} + d_{S_1S_2} + d_{S_4S_5})$$

Para outros casos, o padrão 1 é utilizado. No caso do padrão 3, um triângulo o mais próximo de um eqüilátero possível é formado usando o segmento mais curto da zona de partida.

Na criação de cada ponto, é necessário verificar se o ponto está dentro do domínio ainda não coberto pelos elementos já construídos. Isto quer dizer cada ponto criado tem que estar dentro do domínio considerado e fora de qualquer elemento existente. Essa

verificação, crucial para este tipo de método, baseia-se no conhecimento exato da vizinhança da zona que está sendo criada. No caso bidimensional, um ponto será interno se a intersecção de todas as arestas que dele partem com qualquer aresta da frente é um conjunto vazio. No caso de domínios com um ou mais *loops* internos (“buracos”), é necessário considerar ainda a condição de que nenhum triângulo formado com o ponto em questão contenha um ponto, em qualquer segmento, do contorno de qualquer *loop* interno presente.

Uma nova frente  $F$  é formada pela supressão dos segmentos que pertençam aos triângulos criados e à antiga frente; e pela adição dos novos segmentos dos triângulos criados, que não sejam comuns a dois elementos. O estado atualizado de  $F$  é então processado da mesma forma. A Figura 23 mostra vários estados da frente em evolução correspondendo ao domínio mostrado na Figura 24. Uma vez que  $F$  seja um conjunto vazio, a malha final está constituída.

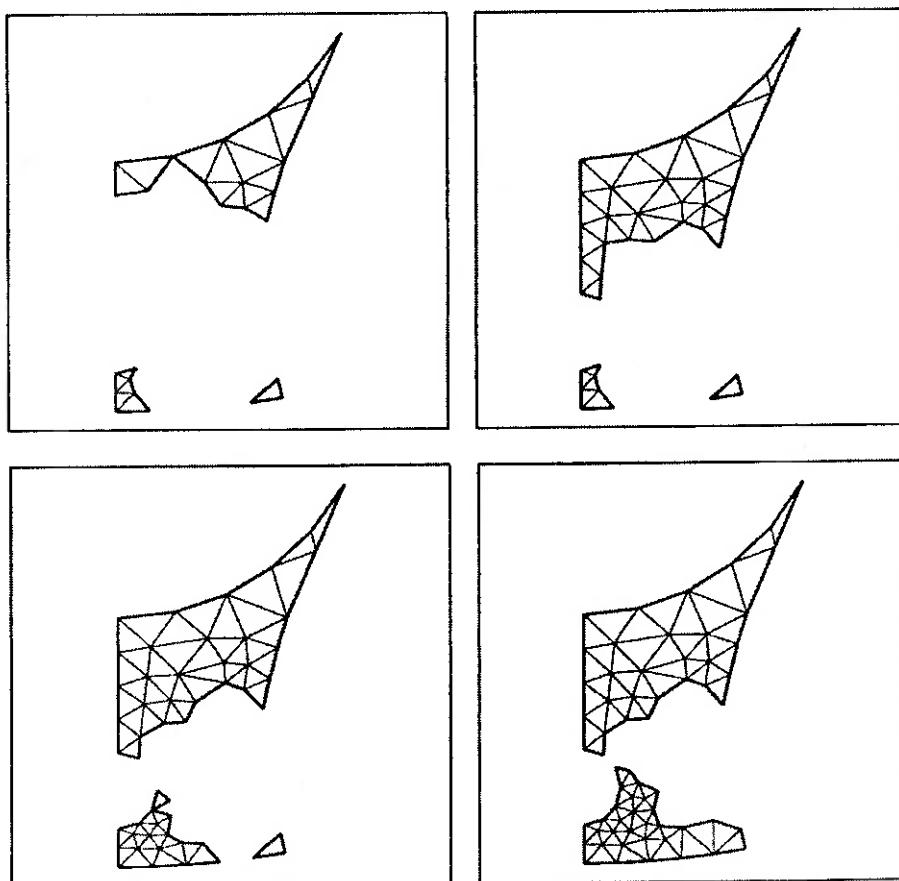
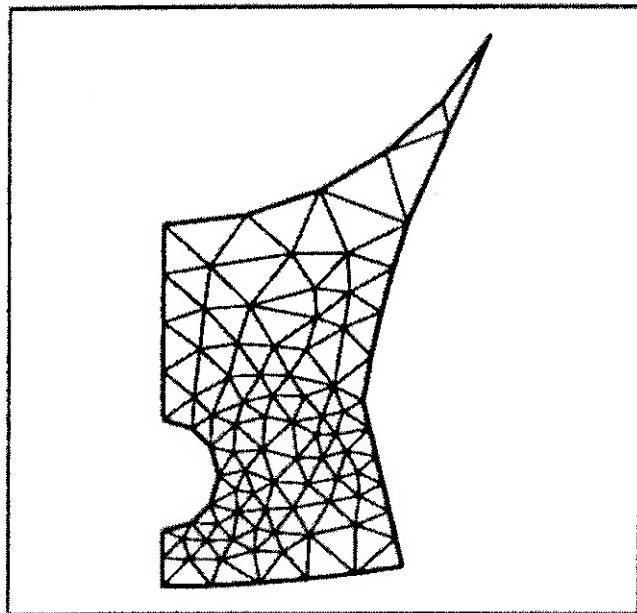


Figura 23 Estados da frente progressiva.

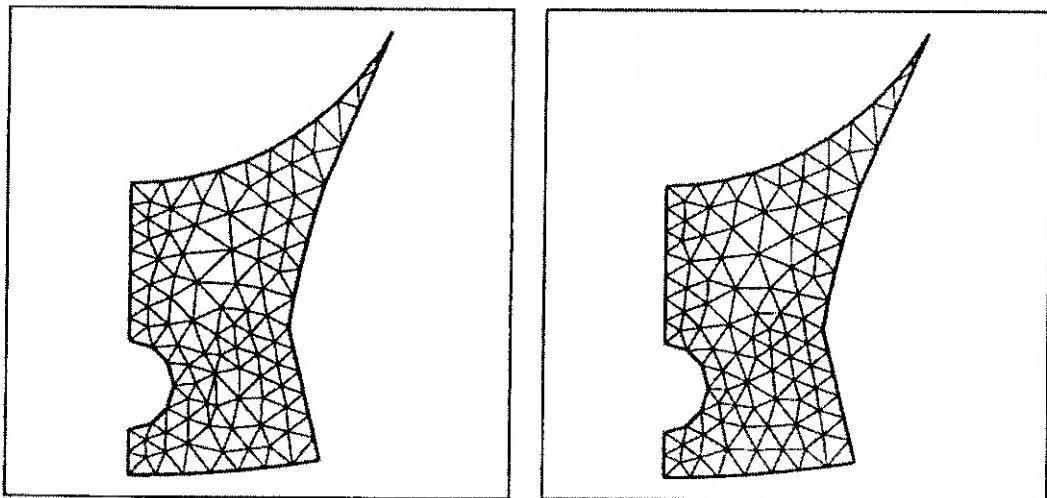


**Figura 24** *Malha final.*

No caso de domínios fortemente não convexos, o método pode não convergir. Além disso, uma variação muito aguda na distribuição dos pontos na fronteira pode produzir um resultado negativo similar. Para sanar este problema, consideram-se apenas subconjuntos primários adequados, ou um método diferente tem que ser usado. De fato, este resultado negativo é uma consequência da dificuldade em provar a validade do método teoricamente, mas uma implementação mais astuta pode superar este problema.

A triangulação obtida está claramente relacionada ao número e localização relativa dos pontos que discretizam a fronteira. Assim, especificando os pontos da fronteira adequadamente, é possível obter uma densidade variável de elementos em certas regiões da malha.

A malha final pode ser polida a fim de obter triângulos de melhor qualidade. Este processo corrige a posição dos pontos criados usando informações locais globalmente. O resultado é mostrado na Figura 25.



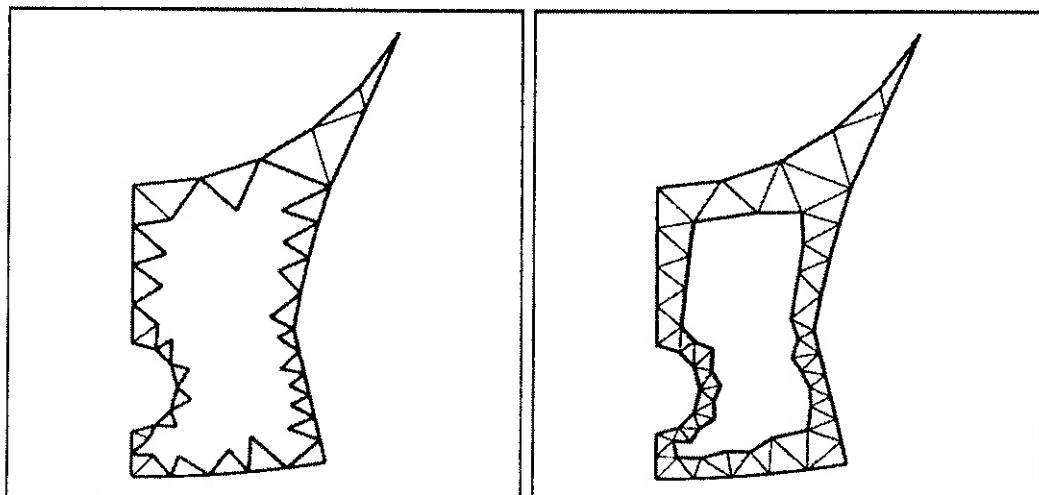
**Figura 25** *Malha antes e depois de ser refinada.*

Existem numerosas variações do método de frente progressiva. Em particular, a zona de partida pode ser escolhida como:

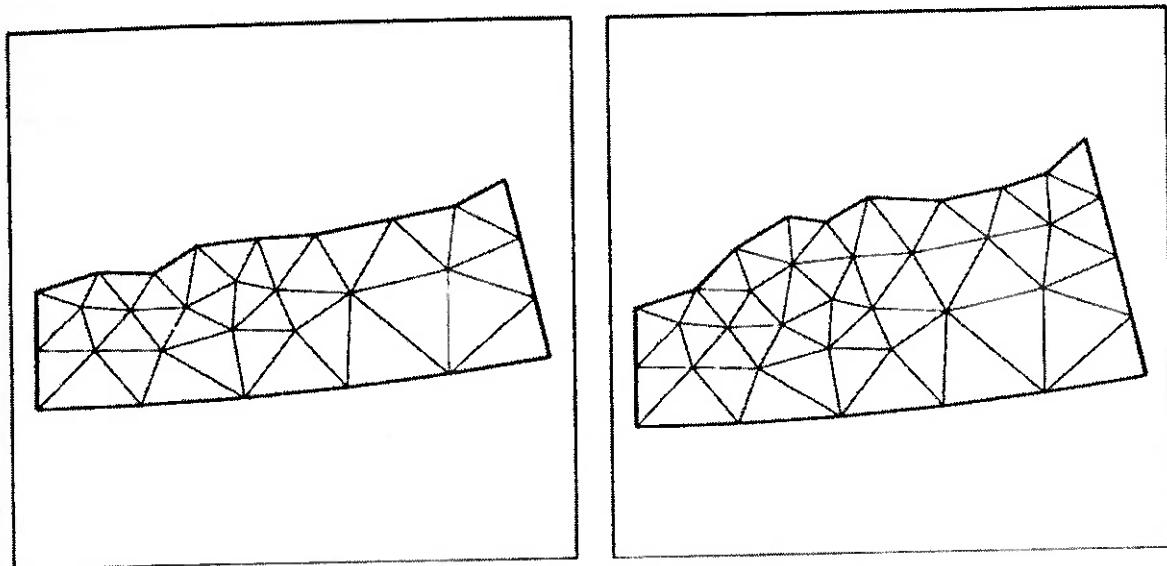
Uma parte do contorno tal que seus elementos constitutivos satisfaçam certas condições (a Figura 22 ilustra o resultado de um algoritmo pertencente a esse grupo);

A fronteira inteira constitui a frente, e seus elementos constitutivos participam da criação de elementos numa ordem pré-definida.

A primeira abordagem se aplica especialmente a zonas particulares, por exemplo, aquelas que contêm ângulos pequenos. A segunda abordagem produz uma inflação da frente inicial (Figura 26) ou a propagação de uma linha inicial (Figura 27).



**Figura 26** *Frente progredindo por inflação.*



**Figura 27** Frente progredindo pelo avanço de uma linha.

Este método pode também ser aplicado para a criação de quadriláteros. Baseado no mesmo princípio, o algoritmo intenta em criar quadriláteros com a forma a mais regular possível. Este processo utiliza triângulos em locais impossíveis de serem cobertos por um quadrilátero ou uma combinação deles.

#### 4.4. Modelagem da Turbulência

O modelo aqui exposto é uma breve descrição do volume 10 da referência [4], e na medida do possível, deve ser consultada para um melhor entendimento deste trabalho.

O modelo de turbulência *Spalart-Allmaras* é um modelo relativamente simples que resolve apenas uma equação de transporte para a viscosidade cinemática turbulenta. Esse modelo engloba uma classe relativamente nova de modelos de uma equação em que não se faz necessário calcular uma escala de comprimento relacionada à espessura local da camada onde os efeitos viscosos se fazem importante. Esse modelo foi desenvolvido especialmente para as aplicações aeroespaciais que envolvem escoamentos com camada limite e têm mostrado dar bons resultados para camadas limites sujeitas a gradientes adversos da pressão.

Na sua forma original, o modelo é bastante eficaz para escoamentos com número de Reynolds baixo. No FLUENT, entretanto, o modelo pode ser utilizado com certas funções de parede quando a definição da malha não é suficientemente fina. Isto pode fazer dele a melhor escolha para simulações na fase de projeto básico onde podemos usar malhas relativamente mais grossas, pois a exatidão dos resultados não possui um caráter crítico.

Entretanto, esse modelo é, de certa forma, relativamente novo, e ainda não se sabe a respeito da sua aplicação estar correta a todos os tipos de escoamentos encontrados na engenharia.

Nos modelos de turbulência que utilizam a equação de Boussinesq para calcular a tensão de Reynolds, a questão principal é como a viscosidade turbulenta será calculada. O modelo proposto por Spalart e por Allmaras resolve uma única equação de transporte para essa quantidade, que é uma forma modificada da viscosidade cinemática turbulenta.

#### 4.4.1. A equação de transporte

A variável de transporte no modelo *Spalart-Allmaras*,  $\tilde{\nu}$ , é idêntica à viscosidade cinemática turbulenta, exceto na região próxima a parede (afetada pelos efeitos viscosos). A equação de transporte para  $\tilde{\nu}$  é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\nu}u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu + S_\nu$$

onde  $G_\nu$  é a produção da viscosidade turbulenta e  $Y_\nu$  é a destruição da viscosidade turbulenta que ocorre na região próxima a parede devido à condição de aderência e ao amortecimento viscoso.  $\sigma_\nu$  e  $C_{b2}$  são constantes empíricas e  $\nu$  é a viscosidade cinemática molecular.  $S_\nu$  é um termo-fonte definido pelo próprio usuário. Note que desde que a energia cinética turbulenta  $k$  não é calculada no modelo de Spalart-Allmaras, o último termo na equação 10,2-5 é ignorado ao estimar as tensões de Reynolds.

#### 4.4.2. Modelando a Viscosidade Turbulenta

A viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , é calculada da seguinte forma

$$\mu_t = \rho\tilde{\nu}f_{\nu l}$$

onde a função de amortecimento viscoso,  $f_{\nu l}$ , é dada por

$$f_{\nu l} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu l}^3}$$

e

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

#### 4.4.3. Modelando a Produção de Turbulência

O termo de produção,  $G_\nu$ , é modelado da seguinte maneira:

$$G_\nu = C_{bl} \rho \tilde{S} \tilde{\nu}$$

onde

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

e

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

$C_{bl}$  e  $\kappa$  são constantes,  $d$  é a distância da parede, e  $S$  é uma medida escalar do tensor de deformação. No modelo original,  $S$  é calculado com a seguinte expressão:

$$S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$$

onde  $\Omega_{ij}$  é definido por

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

A justificativa para a expressão de  $S$  é que a turbulência só se caracterizava onde havia vorticidade, que era gerada nas regiões próximas a parede. Esse fato serviu de grande interesse para a formulação do modelo. Entretanto, sabe-se que a tensão média,  $S_{ij}$ , tem efeito na produção de turbulência, e um incremento ao modelo foi proposto.

Esta modificação combina medidas de rotação e do tensor das tensões na definição de  $S$ :

$$S \equiv |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|)$$

onde

$$C_{prod} = 2.0 \quad |\Omega_{ij}| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

Sendo:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

#### 4.4.4. Modelando a Destrução Turbulenta

O termo de destruição é modelado como

$$Y_v = C_{w1} \rho f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

onde

$$f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}$$

$C_{w1}$ ,  $C_{w2}$  e  $C_{w3}$  são constantes. Veja que a modificação descrita acima inclui os efeitos de  $S$ , o que interfere também no valor de  $\tilde{S}$  para calcular  $r$ .

#### 4.4.5. O Modelo DES

O modelo *Spalart-Allmaras* padrão usa a distância mais próxima da parede como uma definição para a escala de comprimento  $d$ , que tem um papel importante na determinação do nível de produção e destruição de viscosidade turbulenta. O modelo DES substitui  $d$  por uma nova escala de comprimento  $\tilde{d}$ , definida como

$$\tilde{d} = \min(d, C_{des} \Delta)$$

onde o espaçamento da malha,  $\Delta$ , é baseado na maior dimensão da célula, considerando as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A constante  $C_{des}$  é empírica e vale 0,65.

#### 4.4.6. Constantes do Modelo

As constantes  $C_{b1}$ ,  $C_{b2}$ ,  $\sigma_{\tilde{\nu}}$ ,  $C_{v1}$ ,  $C_{w1}$ ,  $C_{w2}$ ,  $C_{w3}$  e  $\kappa$  têm os seguintes valores padrão:

$$C_{b1} = 0.1355 \quad C_{b2} = 0.622 \quad \sigma_{\tilde{\nu}} = \frac{2}{3} \quad C_{v1} = 7.1 \quad \sigma_{\tilde{\nu}} = \frac{2}{3}$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1+C_{b2})}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \quad C_{w2} = 0.3 \quad C_{w3} = 2.0 \quad \kappa = 0.4187$$

#### 4.4.7. Condições de Contorno na Parede

Na parede, a viscosidade cinemática turbulenta,  $\tilde{\nu}$ , assume o valor zero.

Quando uma malha é fina o suficiente para calcular a subcamada laminar, a tensão de cisalhamento na parede é obtida através da seguinte relação:

$$\frac{u}{u_t} = \frac{\rho u_t y}{\mu}$$

Se a malha é muito grossa, assumimos que o centróide da célula adjacente à parede se enquadra na região logarítmica da camada limite, e a lei de parede é então empregada:

$$\frac{u}{u_t} = \frac{1}{\kappa} \ln E \left( \frac{\rho u_t y}{\mu} \right)$$

onde  $u$  é a velocidade paralela a parede,  $u_t$  é a velocidade tangencial,  $y$  é a distância da parede,  $\kappa$  é a constante de Von Kármán, e  $E = 9.793$ .

#### 4.4.8. Modelando a Transferência de Calor e de Massa

O transporte turbulento de calor é modelado usando o conceito da analogia de Reynolds com a transferência da quantidade de movimento turbulenta.

E equação da energia é então dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i (\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_i (\tau_{ij})_{eff} \right] + S_h$$

onde  $k$ , neste caso, é a condutividade térmica,  $E$  é a energia total e  $(\tau_{ij})_{eff}$  é o tensor das tensões, definido como

$$(\tau_{ij})_{eff} = \mu_{eff} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij}$$

O termo  $(\tau_{ij})_{eff}$  representa o aquecimento causado pelos efeitos viscosos. O número de Prandtl padrão utilizado pelo Fluent é 0,85.

A transferência de massa é tratada de forma semelhante, só que desta vez com o número de Schimidt. O valor padrão é de 0,70.

## 5. Resultados

Nesta seção serão apresentados todos os resultados obtidos durante o trabalho, tais como o campo de velocidade, pressão, temperatura, densidade, linhas de corrente, contorno de vorticidade e vetores de velocidade. Além disso, é mostrado também, o efeito causado na simulação numérica em função do número de células presentes em cada malha.

Todos os valores observados nos gráficos e figuras apresentados nesta parte estão no Sistema Internacional de Unidades.

### 5.1. Geometrias Bidimensionais

Aqui estão presentes as análises feitas para perfis bidimensionais, objetivando o aprendizado e familiarização com o programa utilizado.

Para todas as simulações mostradas nesta seção, foi adotado o modelo de turbulência “Spalart-Allmaras”, com aproximação “UpWind” de segunda ordem para a função de interpolação. O campo de pressão ao longe é em forma de uma elipse e o perfil se encontra a uma distância de 5 cordas do montante e a 10 cordas de jusante. O número de Mach ao longe é fixado em 0.30 e a temperatura é de 300K.

Foi feito um estudo de sensibilidade para validar a utilização das malhas, não correndo o risco da eventual obtenção de resultados errados.

### 5.1.1. Perfil NACA 2412

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.1. A malha utilizada nesta simulação possui 41192 células, 204 nós na parede e 182 nós na condição de campo de pressão ao longe.

#### 5.1.1.1. Ângulo de ataque de $0^\circ$

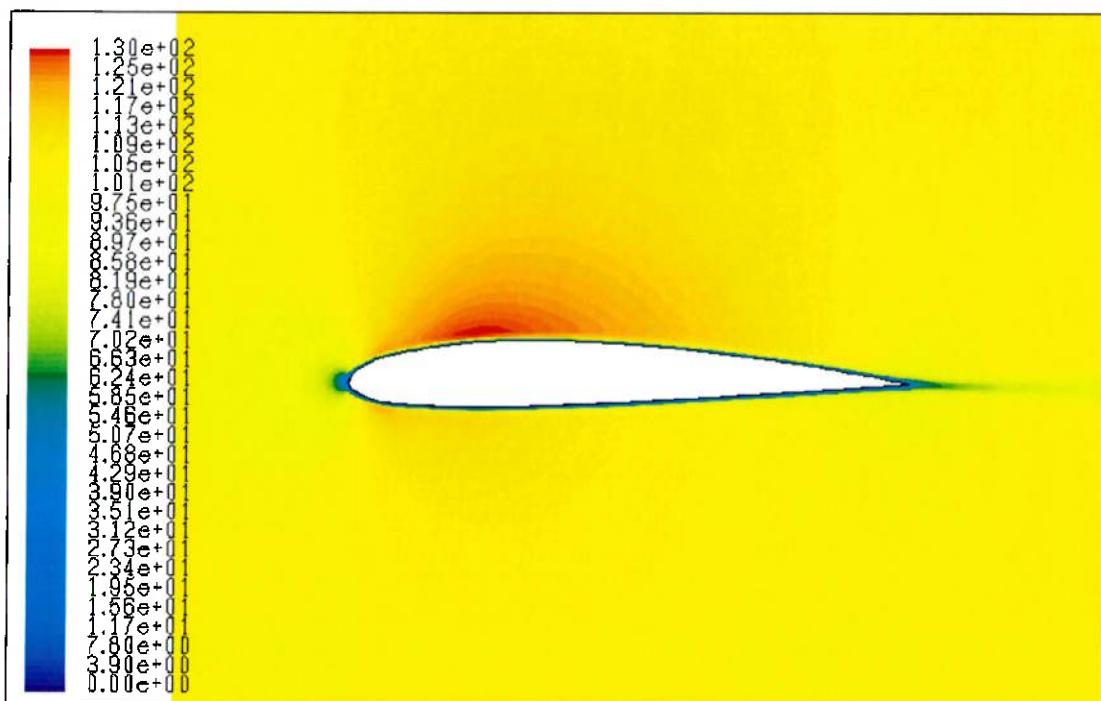
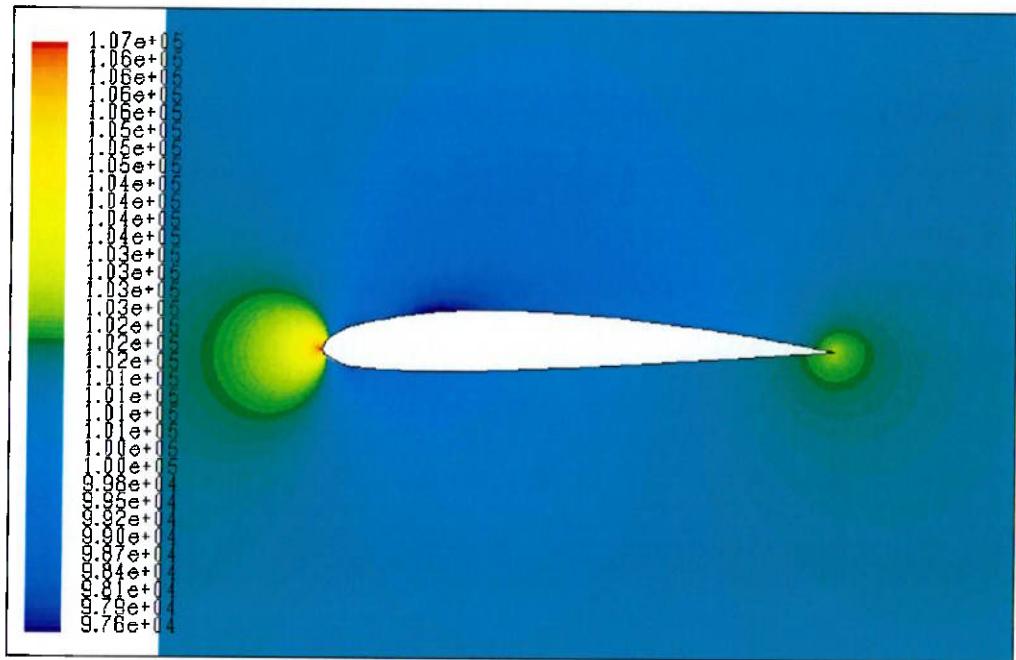


Figura 28 *Campo de Velocidade.*

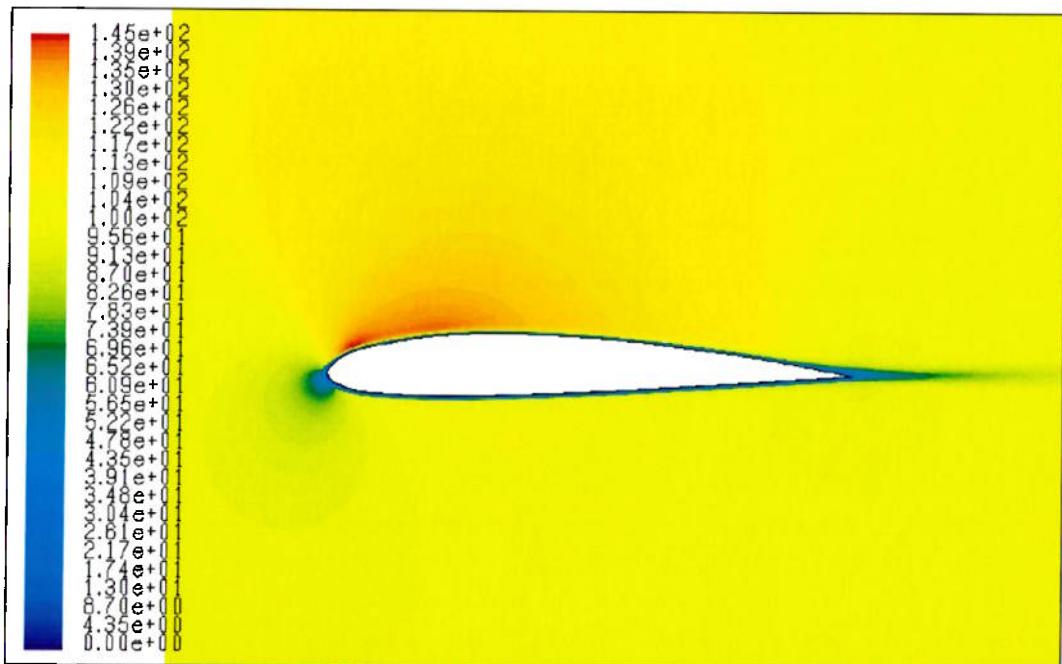
A Figura 28 mostra o campo de velocidade próximo ao perfil, para um ângulo de ataque de  $0^\circ$ . Note que a magnitude da velocidade é maior na parte superior que na inferior e o ponto de estagnação do escoamento se encontra bem no bordo de ataque do aerofólio; um detalhe mais preciso na parede mostraria que a velocidade na parede é nula, conforme a teoria da aderência.



**Figura 29** Campo de Pressão em Pa.

A Figura 29 indica o campo de pressão ao redor do aerofólio, e se faz coerente com o campo de pressão mostrado na Figura 28. Note que a pressão é maior na parte inferior do perfil, gerando assim uma força vertical positiva, resultando num coeficiente de sustentação positivo.

#### 5.1.1.2. Ângulo de ataque de 3°

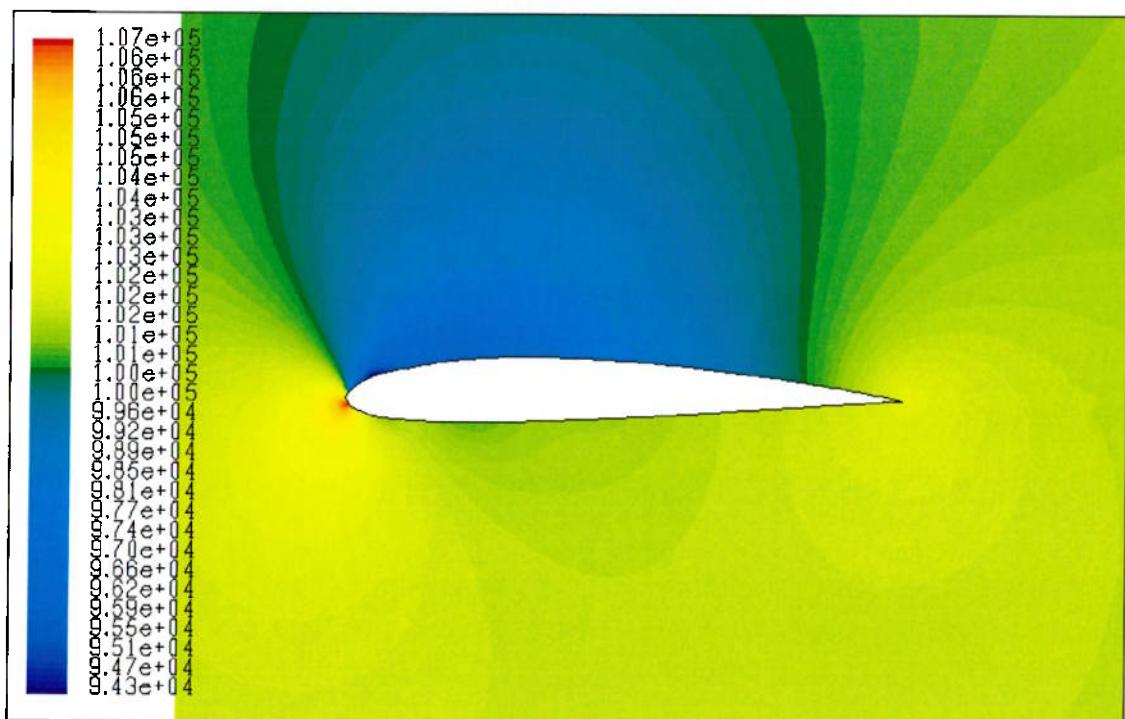


**Figura 30** Campo de Velocidade.

Podemos ver na Figura 30 e Figura 31 a consequência de impormos uma variação de  $3^\circ$  no ângulo de ataque do aerofólio.

De maneira análoga ao caso anterior, o campo de velocidade mostrado na Figura 30, mostra que a magnitude da velocidade é maior na superfície superior, porém o seu valor máximo é maior que no primeiro caso.

Da mesma forma ocorre com a pressão. A Figura 31 mostra que os valores de pressão maiores ocorrem na superfície inferior, só que desta feita, a magnitude é maior que na primeira simulação. Assim sendo, para este ângulo de ataque, teremos uma força de sustentação maior, resultando num coeficiente de sustentação maior.



**Figura 31** Campo de Pressão em Pa.

### 5.1.1.3. Ângulo de ataque de $6^\circ$

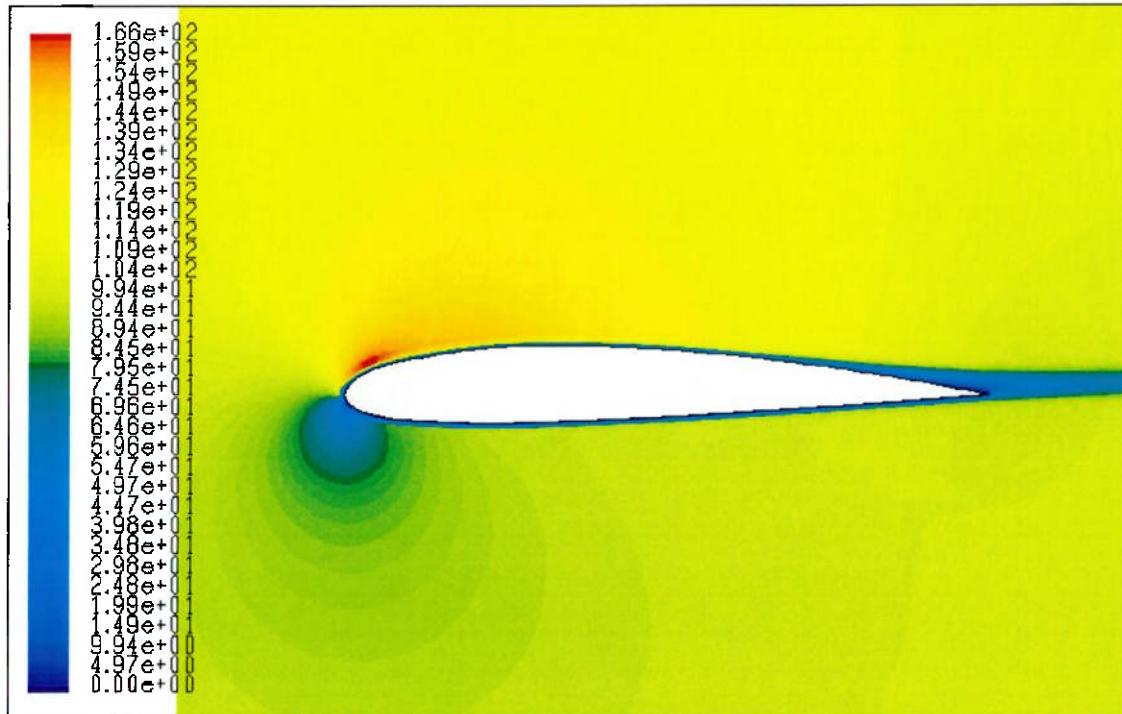
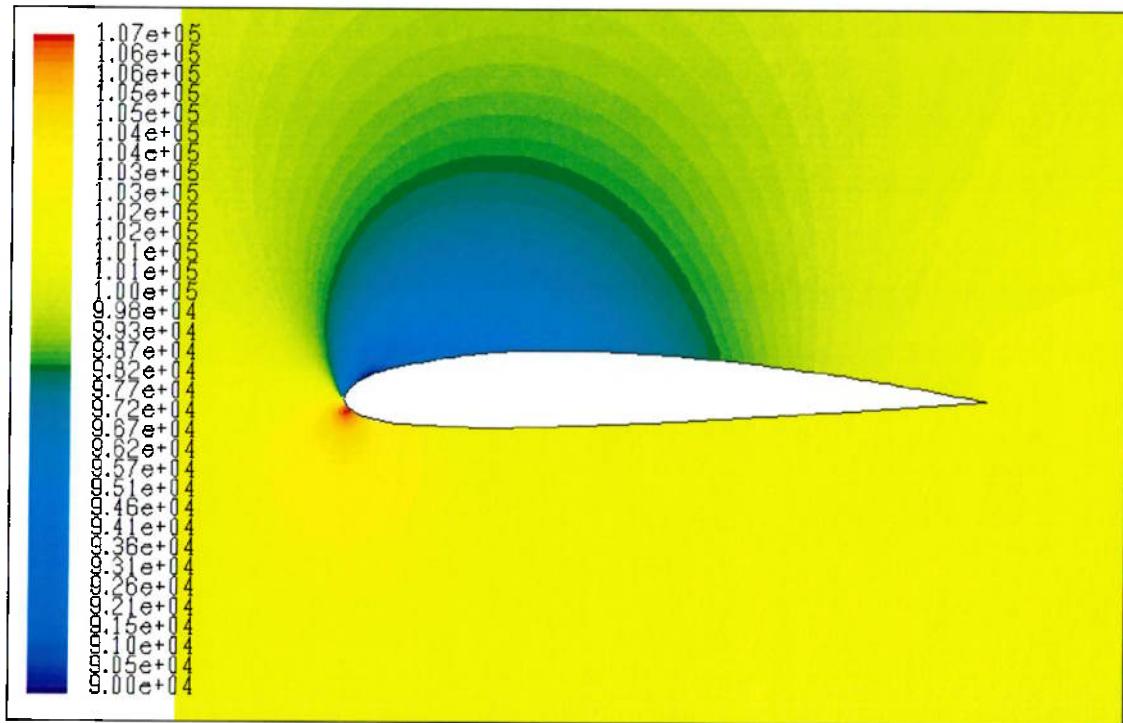


Figura 32 *Campo de Velocidade.*

Da mesma maneira que ocorreu um acréscimo na velocidade quando impusemos um ângulo de ataque de  $3^\circ$ , nessa simulação também há um acréscimo na valor máximo da velocidade, como pode ser visto na Figura 32, onde é mostrado o campo de velocidade para essa nova condição.

De maneira semelhante, vamos observar o resultado para o campo de pressão. Na Figura 33, vemos o contorno de pressão ao redor do aerofólio e quando comparamos com os valores do item 5.1.1.2, podemos observar que os valores da pressão na parte superior do perfil são menores, ou seja, mais uma vez temos uma componente de força com maior módulo, gerando um coeficiente de sustentação maior que o obtido no item anterior.



**Figura 33** Campo de Pressão em Pa.

### 5.1.2. Perfil NACA 0012

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.1. A malha utilizada nesta simulação possui 120728 células, 408 nós na parede e 196 nós na condição de campo de pressão ao longe.

#### 5.1.2.1. Ângulo de ataque de 0°

Foi feita apenas uma análise para o perfil 0012. Pois o mesmo fenômeno observado no item 5.1.1 se verificaria aqui.

A seguir temos três figuras que mostram o campo de pressão, velocidade e temperatura. Por se tratar de um perfil simétrico, vemos que o campo de pressão na Figura 34 é simétrico. O mesmo ocorre para a velocidade e temperatura, mostrados na Figura 35 e Figura 36.

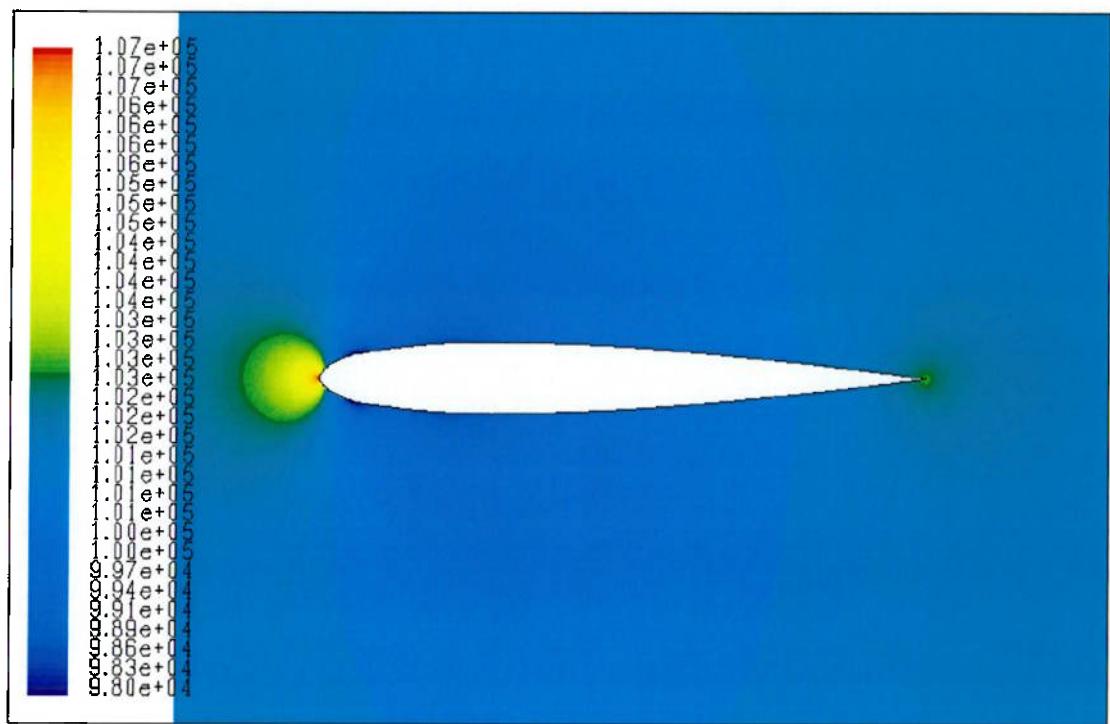


Figura 34 Campo de Pressão.

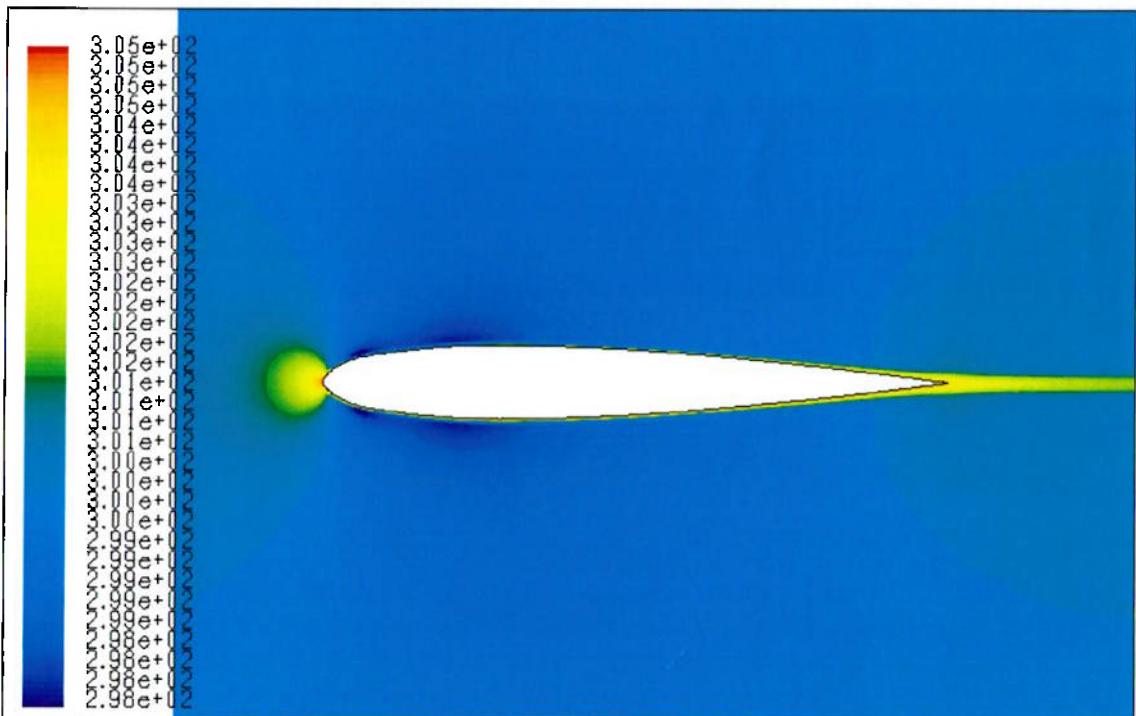
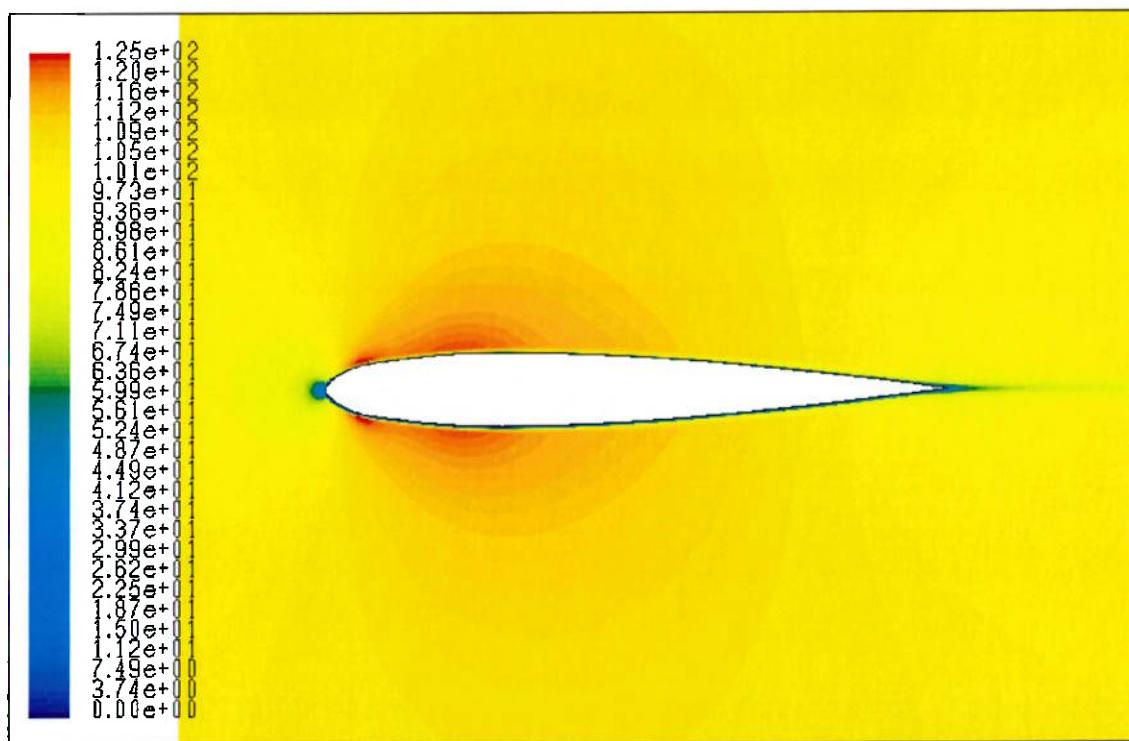


Figura 35 Campo de Temperatura.



**Figura 36** Campo de Velocidade.

Note que os maiores valores de temperatura ocorrem próximo a parede, e isso se deve ao alto valor de gradiente de velocidade com relação as duas coordenadas cartesianas.

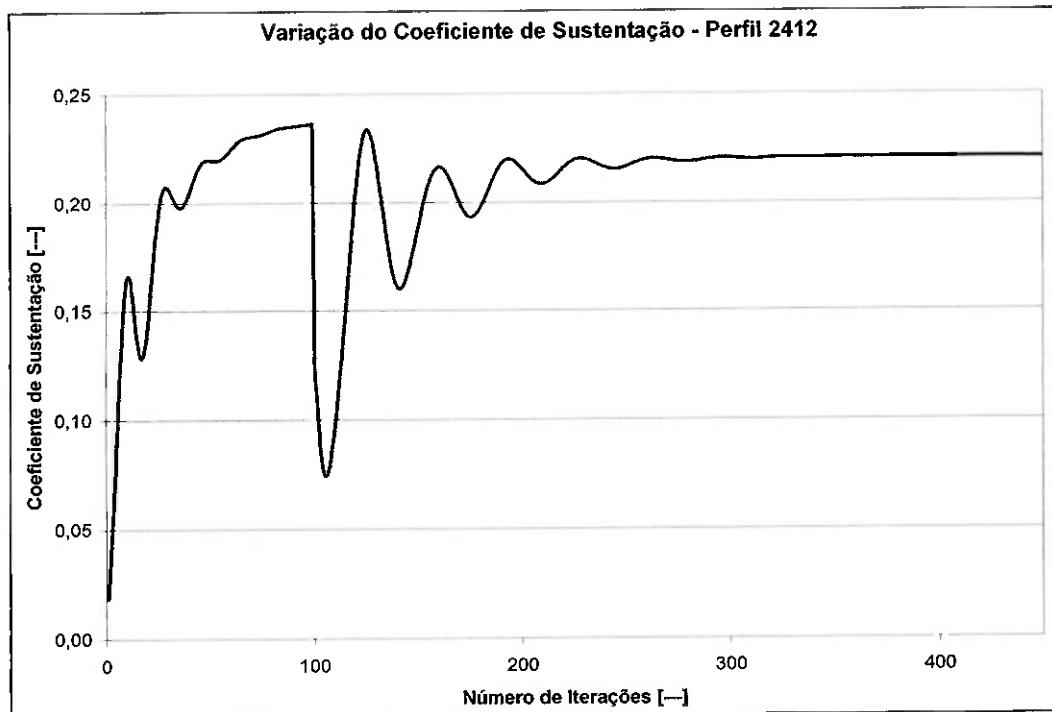
A termo de dissipação viscosa na equação da energia serve de bom suporte para entender os resultados encontrados na Figura 35.

### 5.1.3. Perfis NACA 0012 versus 2412

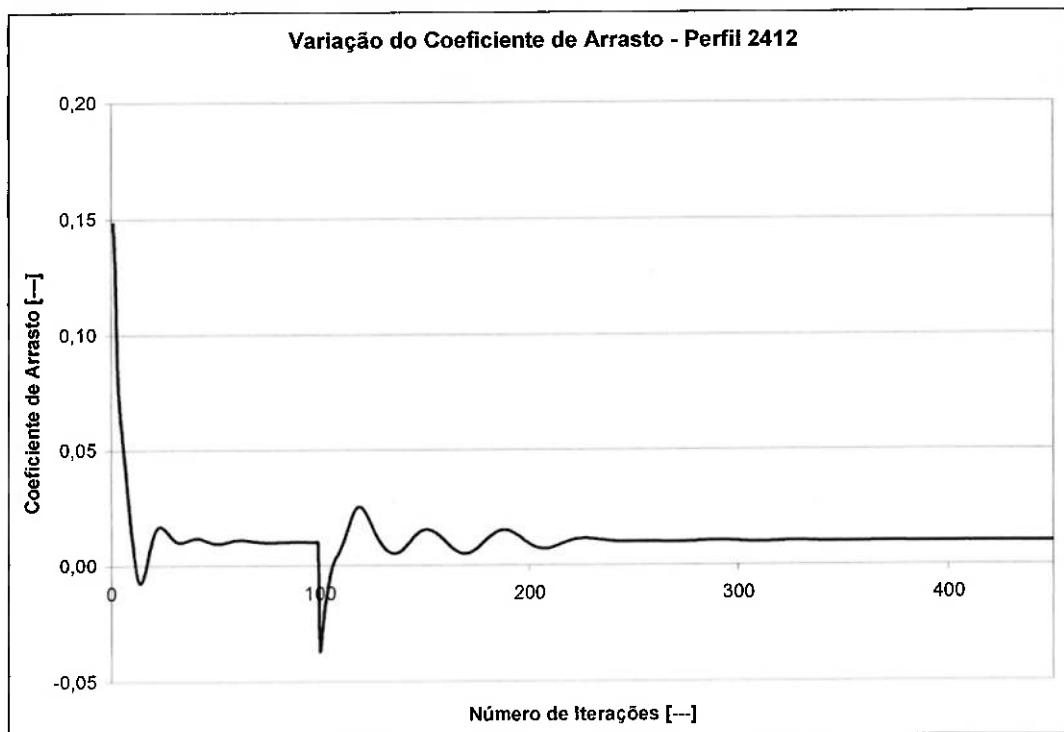
A seguir será apresentada uma comparação entre o número de iterações necessárias para convergência do coeficientes de sustentação,  $C_L$ , e de arrasto,  $C_D$ , entre duas malhas.

A malha utilizada para o perfil NACA 2412 foi criada com aproximadamente 41200 células e foram necessárias cerca de 450 iterações até chegarmos a convergência requerida. A malha para o perfil 0012 possui cerca de 121000 células e para este caso foram calculadas quase 800 iterações até a convergência.

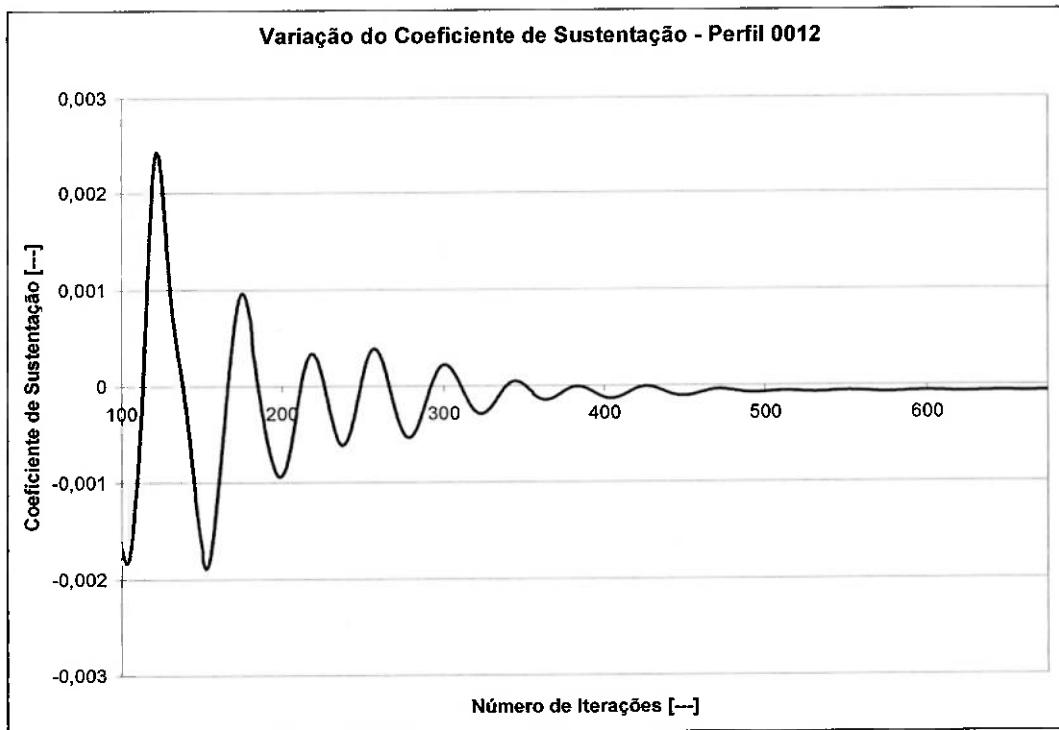
Podemos ver também, ainda em relação a quantidade de células presentes na malha, que o tempo de processamento aumenta significativamente com o incremento no número de elementos.



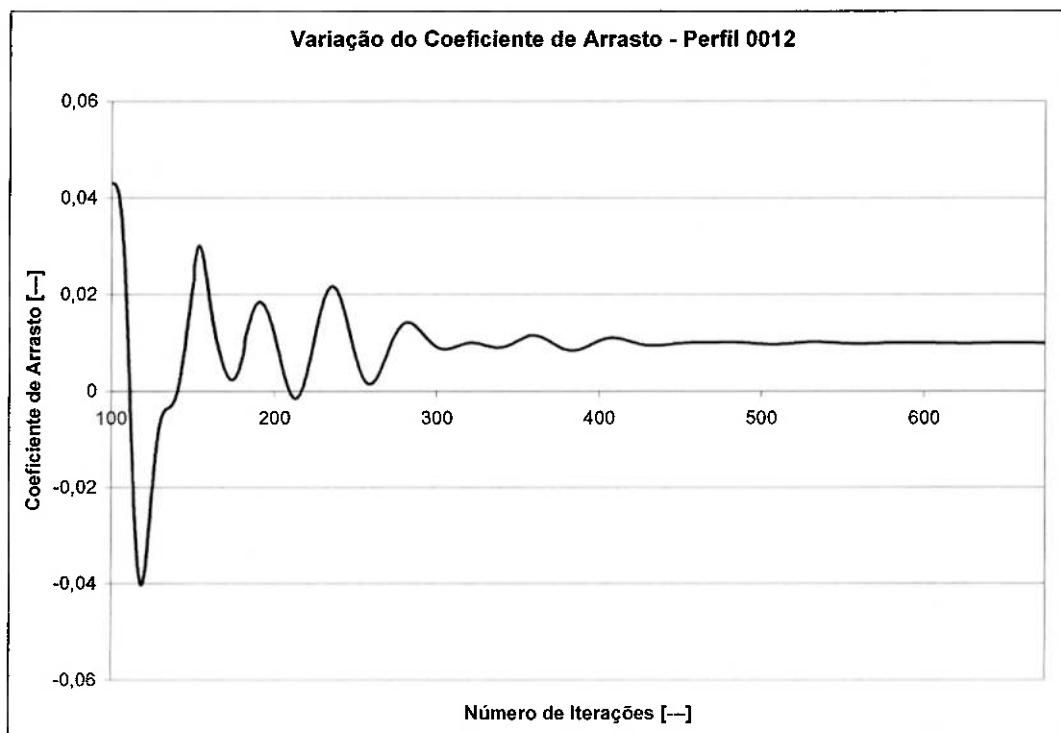
**Figura 37** Oscilação do coeficiente de sustentação para uma malha com 41192 elementos.



**Figura 38** *Oscilação do coeficiente de arrasto para uma malha com 41192 elementos.*



**Figura 39** *Oscilação do coeficiente de sustentação para uma malha com 120728 elementos.*



**Figura 40** Oscilação do coeficiente de arrasto para uma malha com 120728 elementos.

## 5.2. Geometrias Tridimensionais

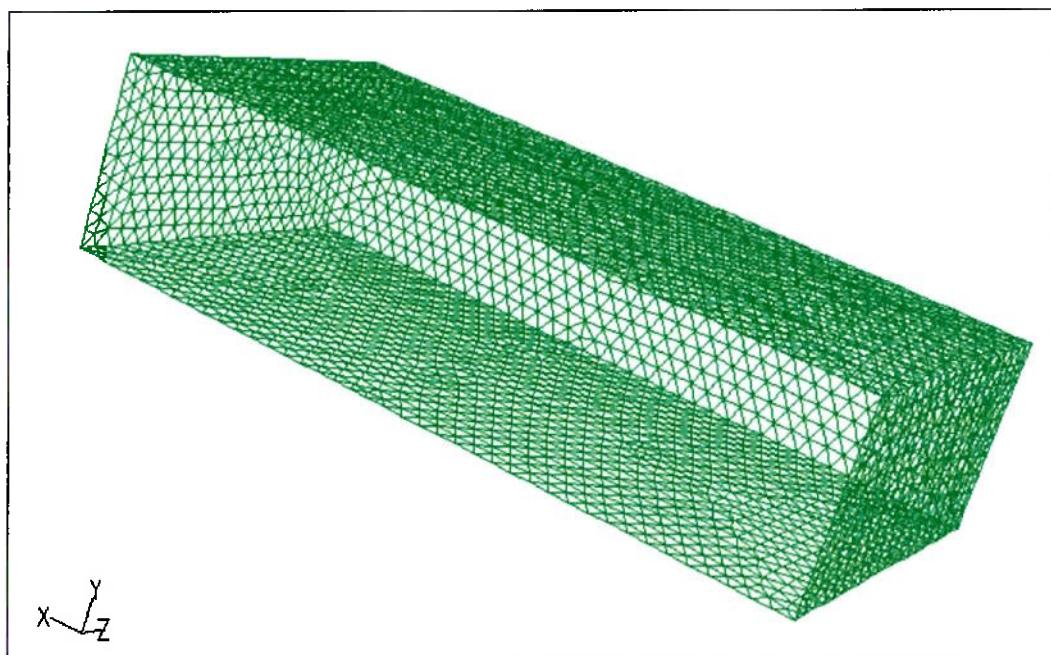
Aqui estão presentes as análises feitas para cinco geometrias tridimensionais. Logo após os resultados gráficos, é apresentada uma tabela comparando os valores obtidos de  $C_L$ ,  $C_D$  e  $C_L/C_D$  para cada uma das simulações.

Para todas as simulações mostradas nesta seção, foi adotado o modelo de turbulência “Spalart-Allmaras”, com aproximação “UpWind” de segunda ordem para a função de interpolação. O campo de pressão ao longe é em forma de uma elipse e o perfil se encontra a uma distância de 4 cordas do montante e a 10 cordas de jusante. O número de Mach ao longe é fixado em 0.30 e a temperatura é de 300K.

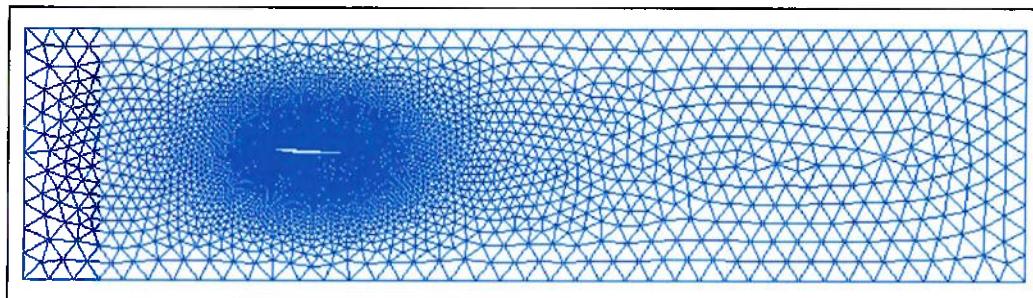
Foi feito um estudo de sensibilidade para validar a utilização das malhas, não correndo o risco da eventual obtenção de resultados errados.

Para facilitar a simulação, bem como o tempo de processamento, os modelos tridimensionais aqui expostos, foram criados considerando a simetria do problema, ou seja, apenas metade da malha do sólido foi criada. Isso pode ser melhor visualizado nas seções seguintes, quando serão apresentadas cada geometria individualmente.

As duas figuras abaixo mostram as condições de contorno para todos os casos estudados.



**Figura 41** Campo de Pressão ao longe.

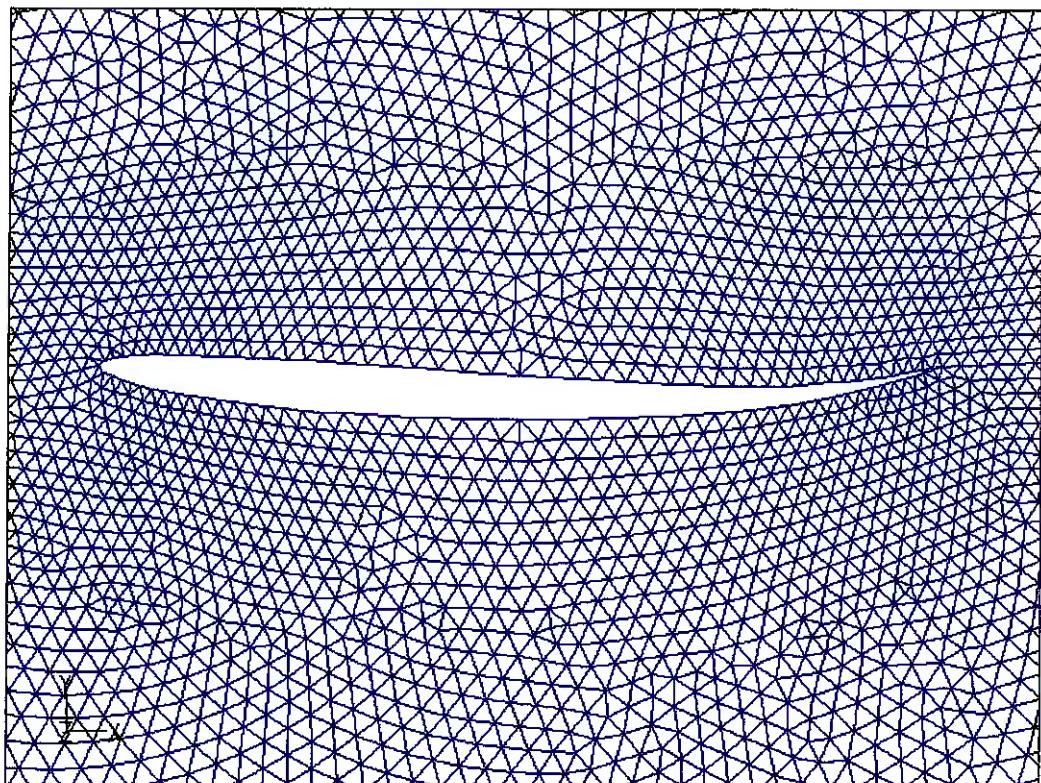


**Figura 42** Face de simetria.

A Figura 41 indica a condição do campo de pressão ao longe, com suas determinadas características apresentadas logo acima.

A Figura 42 mostra a face de simetria do problema. Ela, junto com o campo de pressão ao longe formam o envólucro global do escoamento.

A figura abaixo é um detalhe da malha, onde pode-se visualizar de melhor maneira a região de simetria próxima ao fólio.

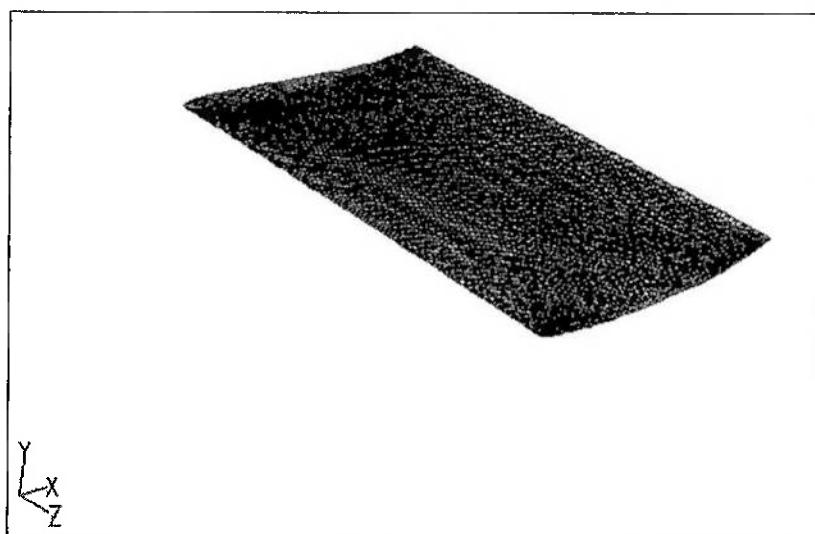


**Figura 43** "Zoom" na região da face de simetria.

### 5.2.1. Geometria 01

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.2. A malha utilizada nesta simulação possui 157519 células, 5420 faces na condição de campo de pressão ao longe, 9486 faces na condição de parede e 9814 faces na parede de simetria.

A figura abaixo mostra a primeira geometria utilizada para realizar esse estudo.



**Figura 44** Malha da geometria utilizada na primeira simulação.

#### 5.2.1.1. Resultados gráficos

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A Figura 45 mostra as linhas de corrente que vem desde o lado montante do escoamento, passa através da asa e segue para jusante. Note que as linhas de corrente têm uma tendência a se deslocarem de cima para baixo, ou seja, do lado de maior pressão para o lado de menor pressão. Isso pode ficar mais claro quando observamos o campo de pressão na Figura 46 e na Figura 47.

Como dito acima, a Figura 46 e a Figura 47, mostram o campo de pressão na parede da asa e fica claro que o lado superior é o lado de maior pressão. Assim sendo, há uma força resultante vertical para baixo (“Down Force”) que gera um coeficiente de sustentação negativo, visto na Tabela 5.1.

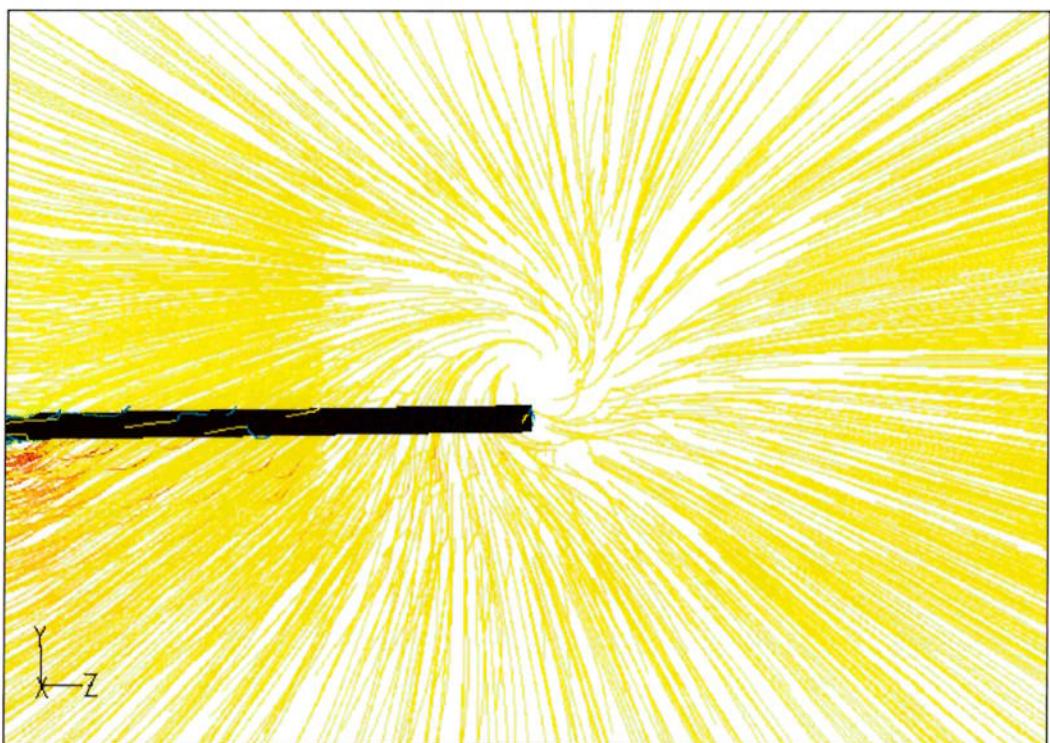


Figura 45 Linhas de corrente.

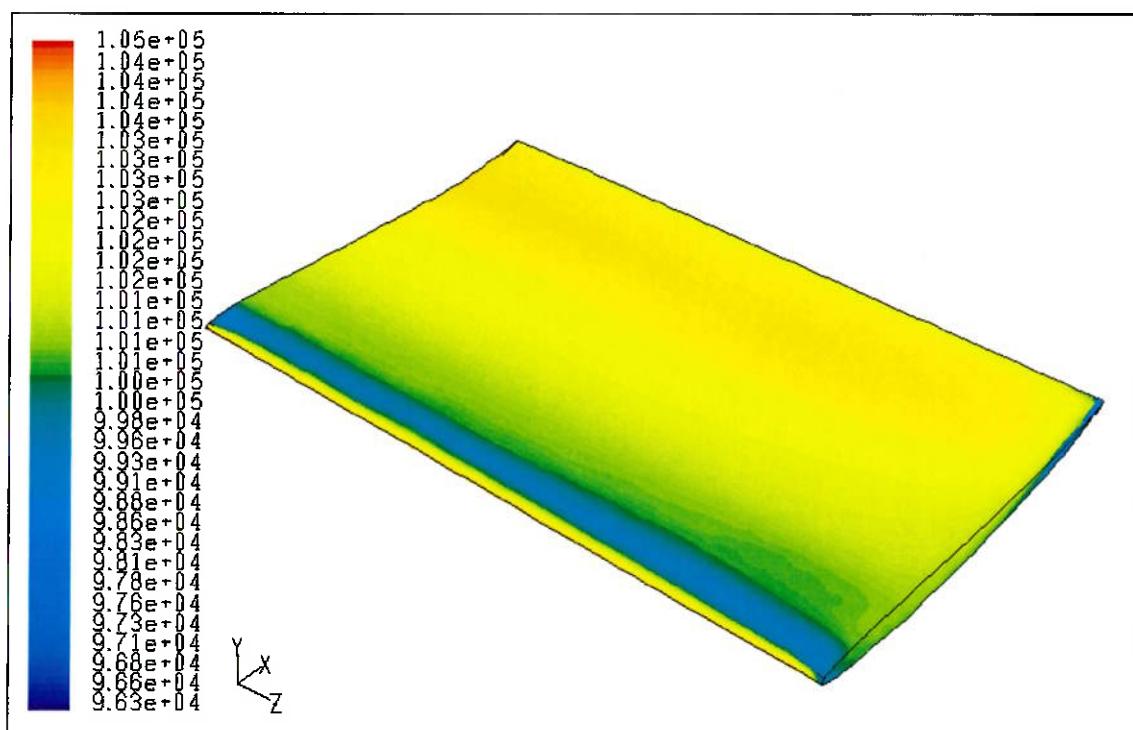


Figura 46 Contorno de pressão na superfície superior da geometria.

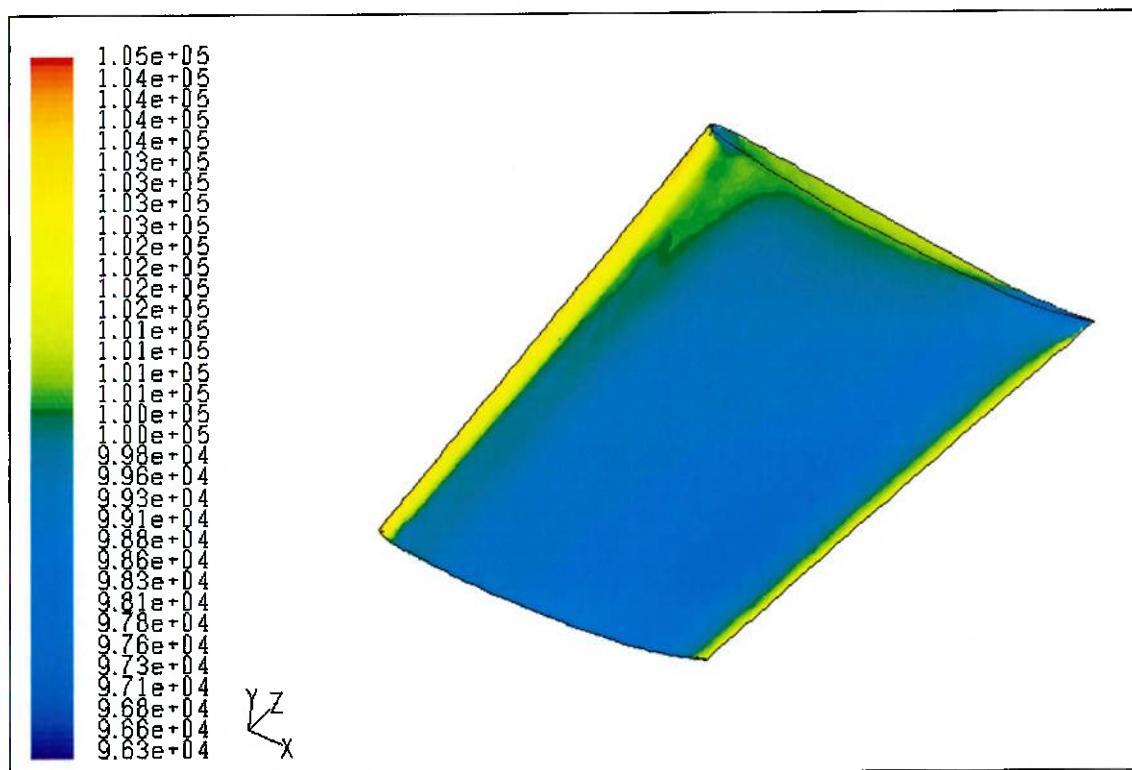


Figura 47 Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.

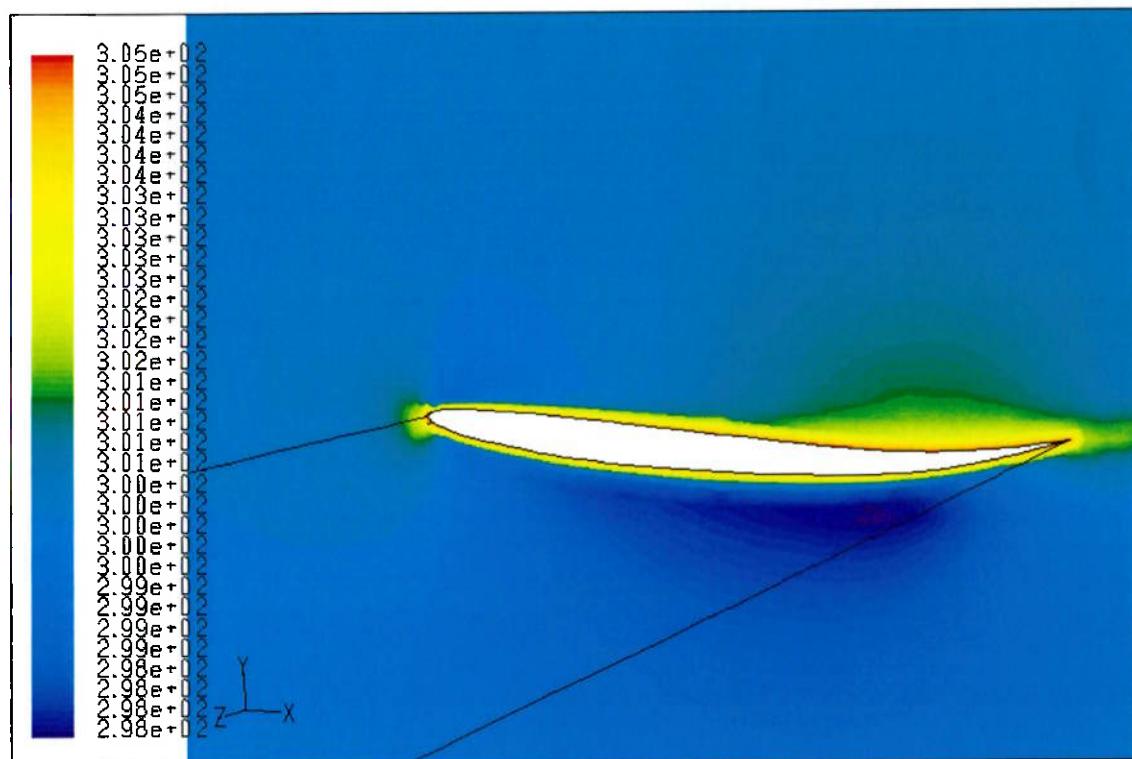
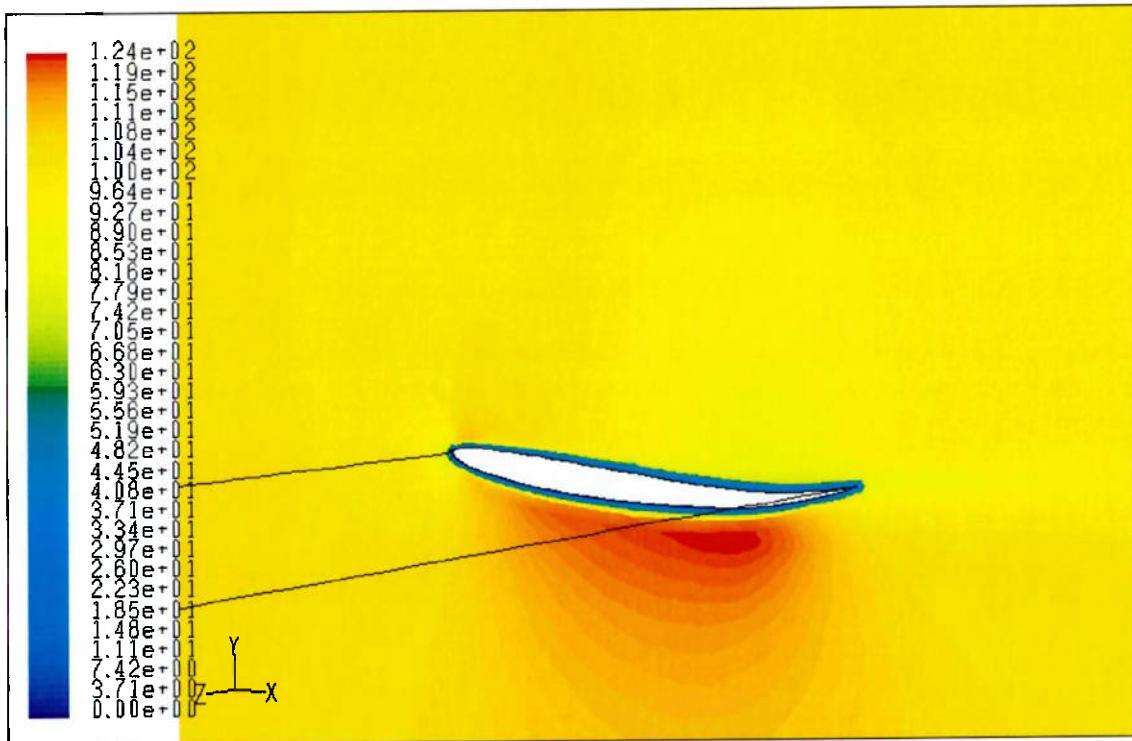


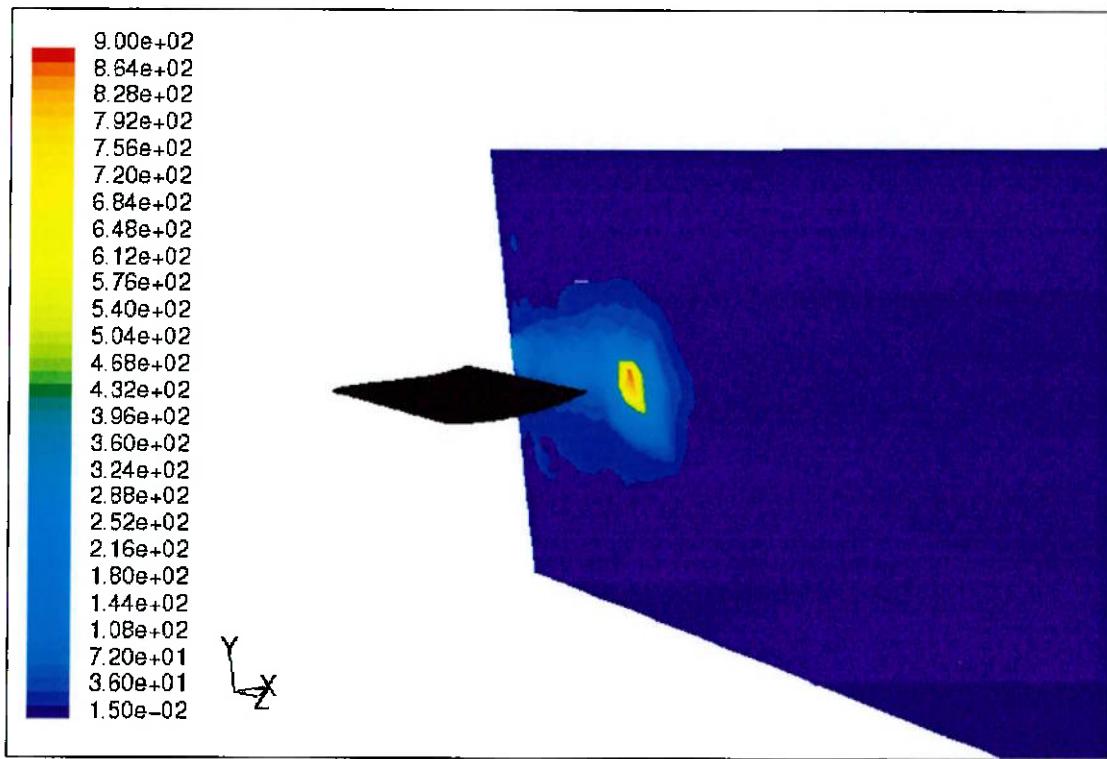
Figura 48 Contorno de temperatura na parede de simetria.



**Figura 49** Contorno de velocidade na parede de simetria.

Na Figura 48 mostra o contorno da temperatura na parede de simetria do problema. Note que os maiores valores de temperatura estão próximos a região da parede, já que é neste local onde os gradientes de velocidade em relação as coordenadas cartesianas são mais intensos. Isso pode ser esclarecido de uma melhor forma se olharmos a função de dissipação viscosa na equação da energia.

O campo de velocidade na parede de simetria é apresentado na Figura 49. Nela podemos ver que a magnitude da velocidade é maior na superfície inferior da asa, ou seja, o lado de menor pressão. Veja também que na região da parede propriamente dita o valor da velocidade é zero, conforme o princípio da aderência.



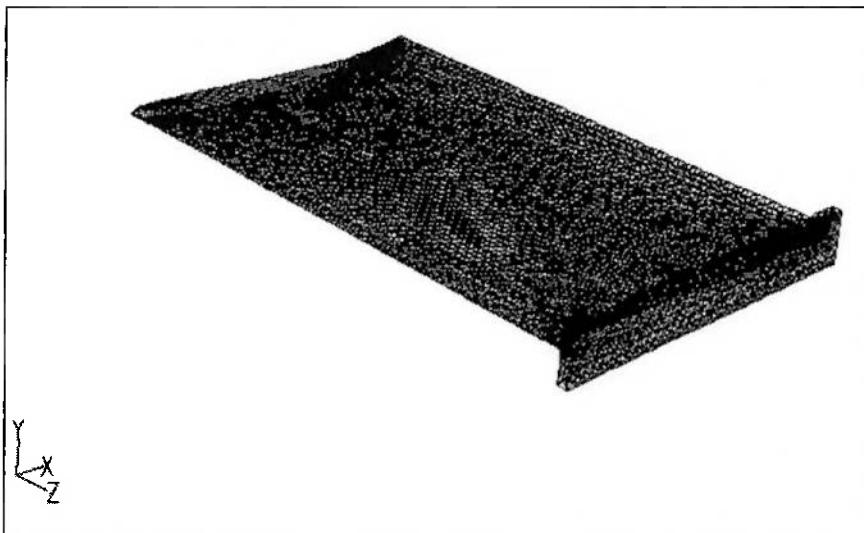
**Figura 50** Valores de vorticidade no plano afastado  $\frac{1}{2}$  corda da asa.

O contorno de vorticidade, num plano que está localizado a uma distância de  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga da asa, é mostrado na Figura 50. Note que lugar o escoamento próximo a ponta da asa é onde a magnitude da vorticidade é mais intensa. Isso pode ser confirmado quando observamos novamente a Figura 45, que mostra as linhas de corrente nessa região.

### 5.2.2. Geometria 02

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.2. A malha utilizada nesta simulação possui 217207 células, 5420 faces na condição de campo de pressão ao longe, 14869 faces na condição de parede e 16371 faces na parede de simetria.

A figura abaixo mostra a segunda geometria utilizada para realizar esse estudo.



**Figura 51** *Malha da geometria utilizada na segunda simulação.*

#### 5.2.2.1. Resultados gráficos

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A Figura 52 mostra as linhas de corrente que vem desde o lado montante do escomento, passa através da asa e segue para jusante. Note que as linhas de corrente, assim como no caso anterior, têm uma tendência a se deslocarem de cima para baixo, ou seja, do lado de maior pressão para o lado de menor pressão. Isso pode ficar mais claro quando observamos o campo de pressão na Figura 53 e na Figura 54.

Como dito acima, a Figura 53 e a Figura 54, mostram o campo de pressão na parede da asa e fica claro que o lado superior é o lado de maior pressão. Assim sendo, há uma força resultante vertical para baixo (“Down Force”) que gera um coeficiente de sustentação negativo, visto na Tabela 5.1.

Com essa nova geometria, chegamos a resultados de pressão maiores na superfície superior, de tal forma que o coeficiente de sustentação seja ligeiramente maior, em módulo, que no primeiro caso.

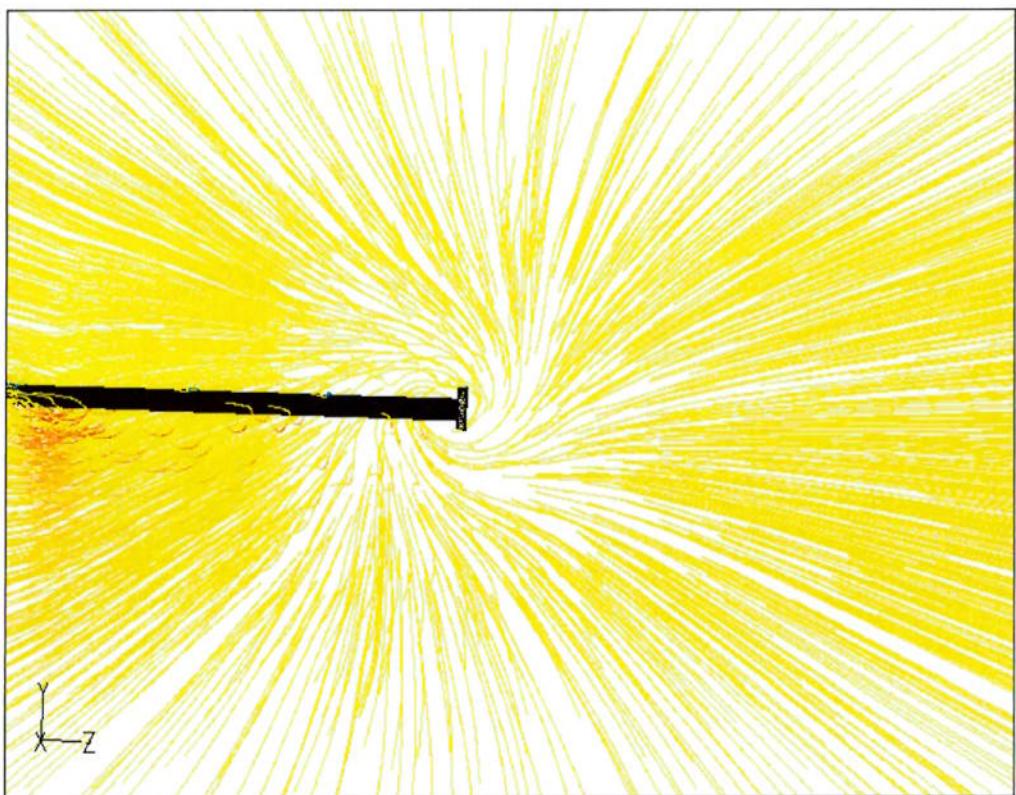


Figura 52 Linhas de corrente.

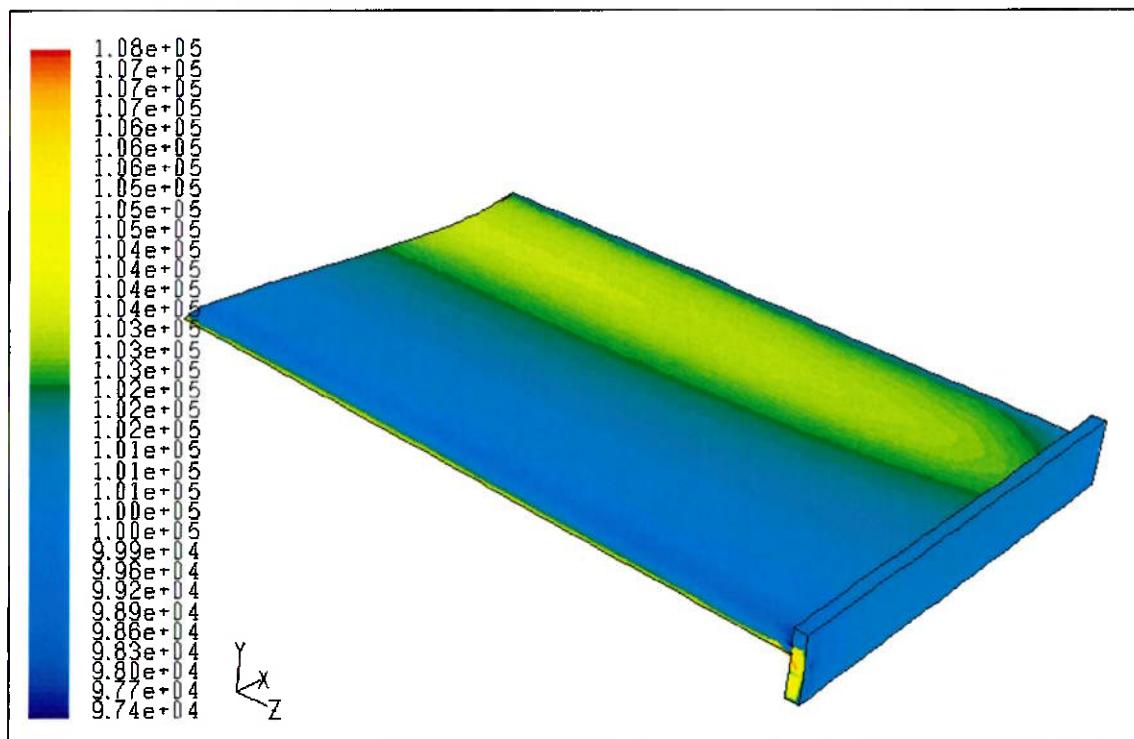


Figura 53 Contorno de pressão na superfície superior da geometria.

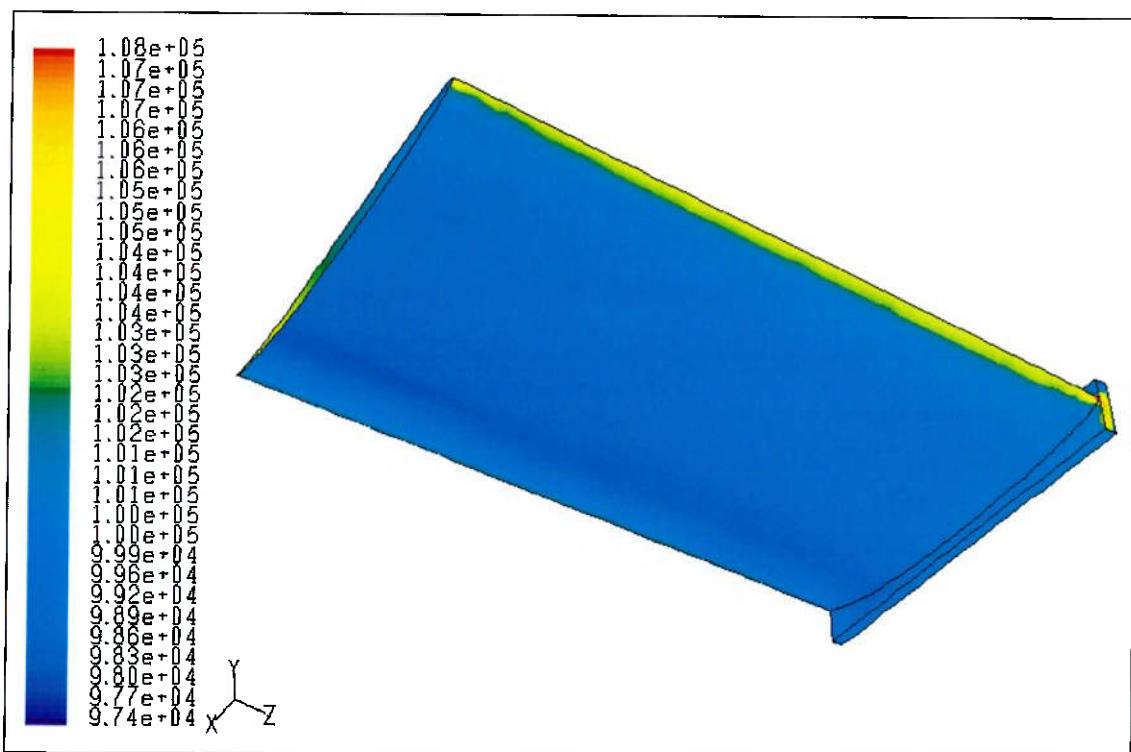


Figura 54 Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.

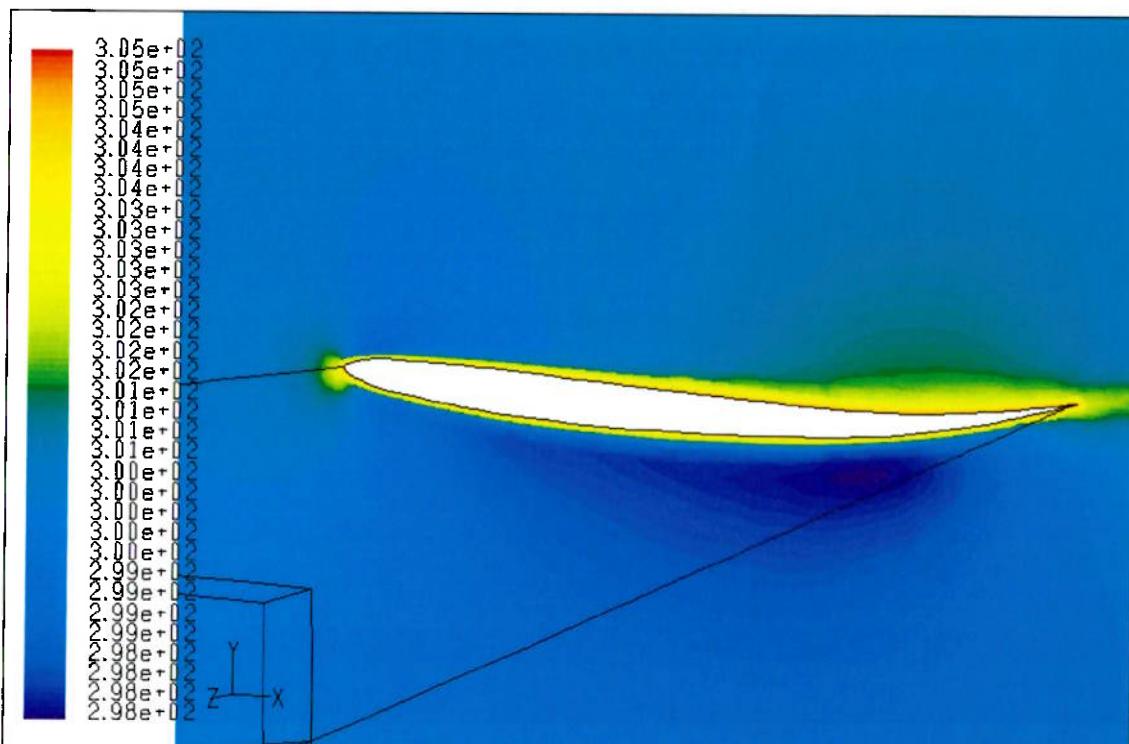
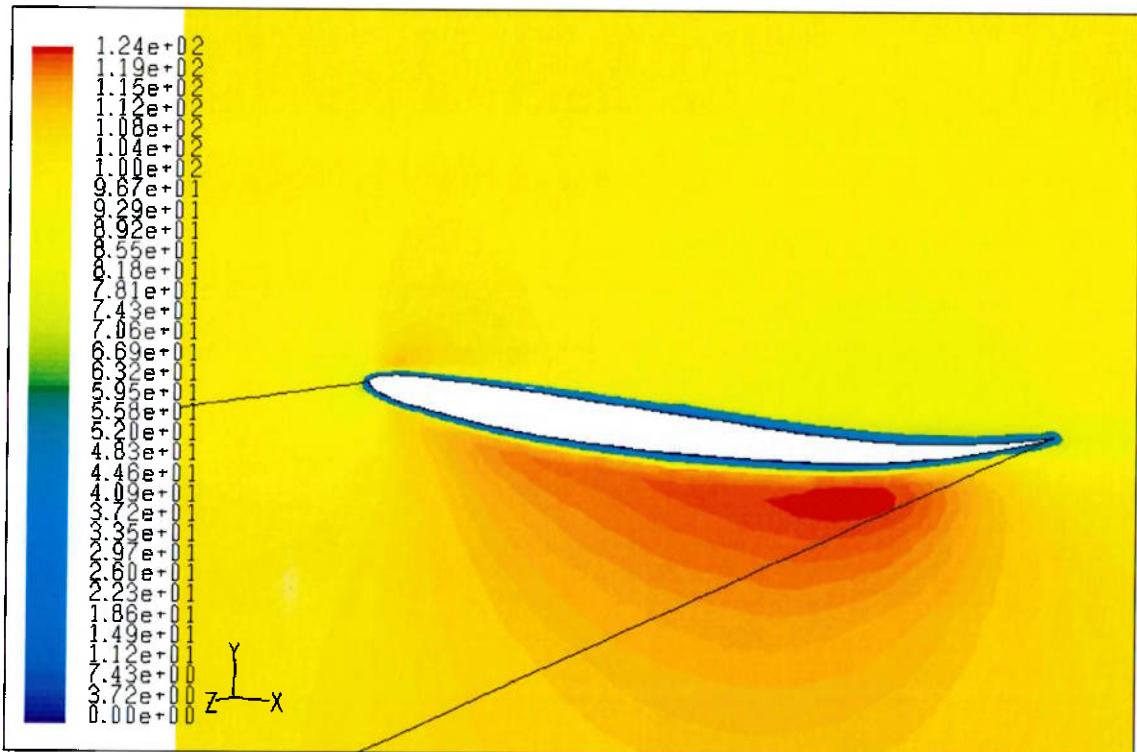


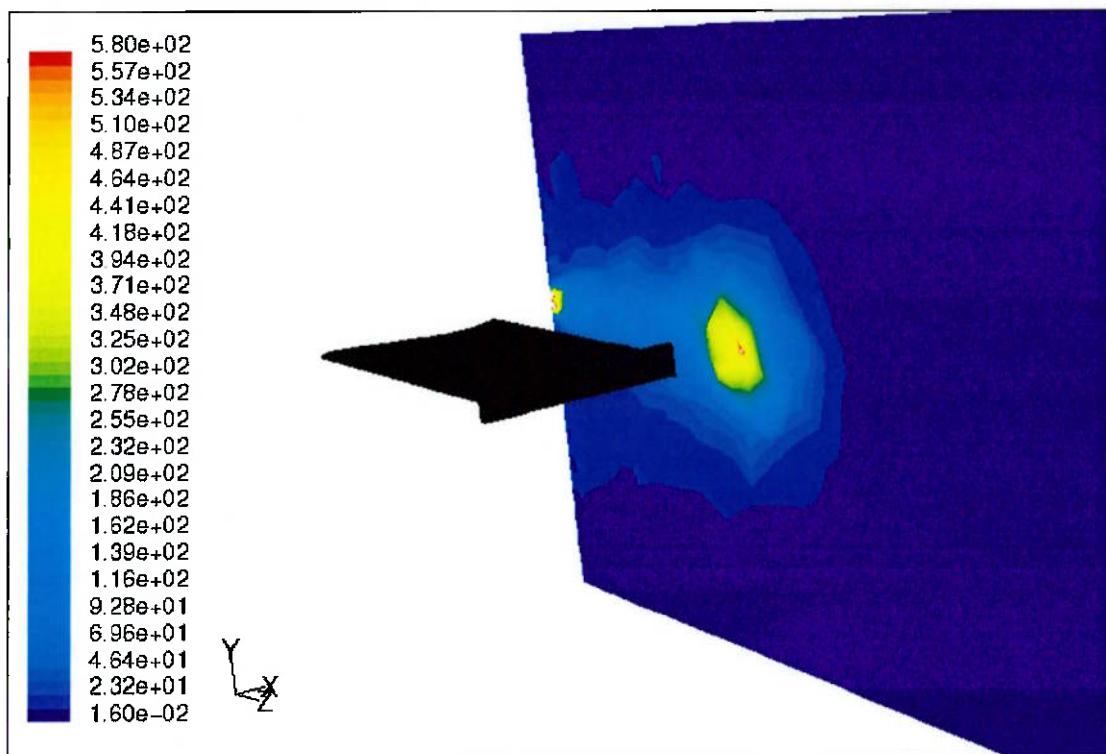
Figura 55 Contorno de temperatura na parede de simetria.



**Figura 56** Contorno de velocidade na parede de simetria.

Na Figura 55 mostra o contorno de temperatura na parede de simetria do problema. Note que os maiores valores de temperatura estão próximos a região da parede, onde os gradientes de velocidade em relação as coordenadas cartesianas são mais intensos. Isso pode ser esclarecido de uma melhor forma se olharmos a função de dissipaçāo viscosa na equaçāo da energia.

O campo de velocidade na parede de simetria é apresentado na Figura 56. Nela podemos ver que a magnitude da velocidade é maior na superfície inferior da asa, ou seja, o lado de menor pressão. Veja também que na região da parede propriamente dita o valor da velocidade é zero, conforme o princípio da aderência.



**Figura 57** Valores de vorticidade no plano afastado  $\frac{1}{2}$  corda da asa.

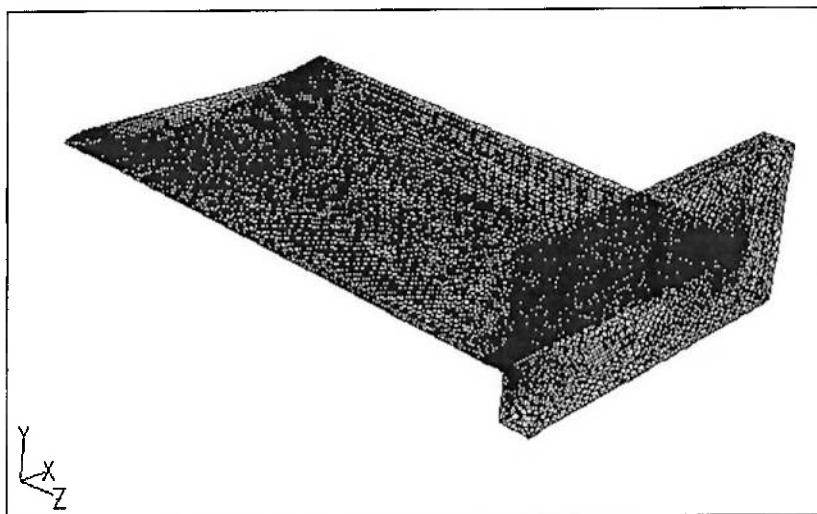
O contorno de vorticidade, num plano que está localizado a uma distância de  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga da asa, é mostrado na Figura 57. Note que lugar o escoamento próximo a ponta da asa é onde a magnitude da vorticidade é mais intensa. Isso pode ser confirmado quando observamos novamente a Figura 52, que mostra as linhas de corrente nessa região.

Para essa geometria observamos que a modificação construída na lateral da asa causou uma diminuição no valor máximo da magnitude de vorticidade.

### 5.2.3. Geometria 03

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.2. A malha utilizada nesta simulação possui 229859 células, 5420 faces na condição de campo de pressão ao longe, 16435 faces na condição de parede e 17011 faces na parede de simetria.

A figura abaixo mostra a terceira geometria utilizada para realizar esse estudo.



**Figura 58** Malha da geometria utilizada na terceira simulação.

#### 5.2.3.1. Resultados gráficos

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A Figura 59 mostra as linhas de corrente que vem desde o lado montante do escoamento, passa através da asa e segue para jusante. Note que as linhas de corrente, assim como no caso anterior, têm uma tendência a se deslocarem de cima para baixo, ou seja, do lado de maior pressão para o lado de menor pressão. Isso pode ficar mais claro quando observamos o campo de pressão na Figura 60 e Figura 61.

Como dito acima, a Figura 60 e Figura 61, mostram o campo de pressão na parede da asa e fica claro que o lado superior é o lado de maior pressão. Assim sendo, há uma força resultante vertical para baixo (“Down Force”) que gera um coeficiente de sustentação negativo, visto na Tabela 5.1.

Com essa nova geometria, chegamos a resultados de pressão maiores na superfície superior, de tal forma que o coeficiente de sustentação seja ligeiramente maior, em módulo, que no primeiro e segundo casos. Em outras palavras, significa dizer que a integral do campo de pressão ao longo da área do aerofólio produz uma força vertical com módulo maior que os outros dois casos anteriores.

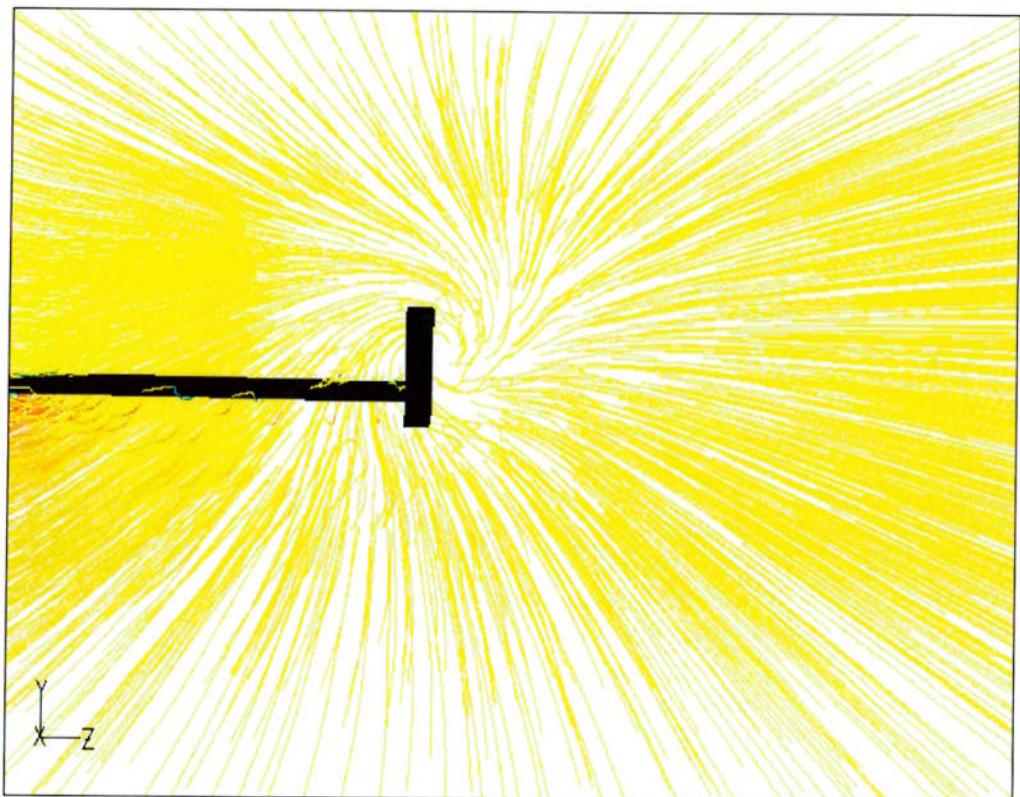


Figura 59 Linhas de corrente.

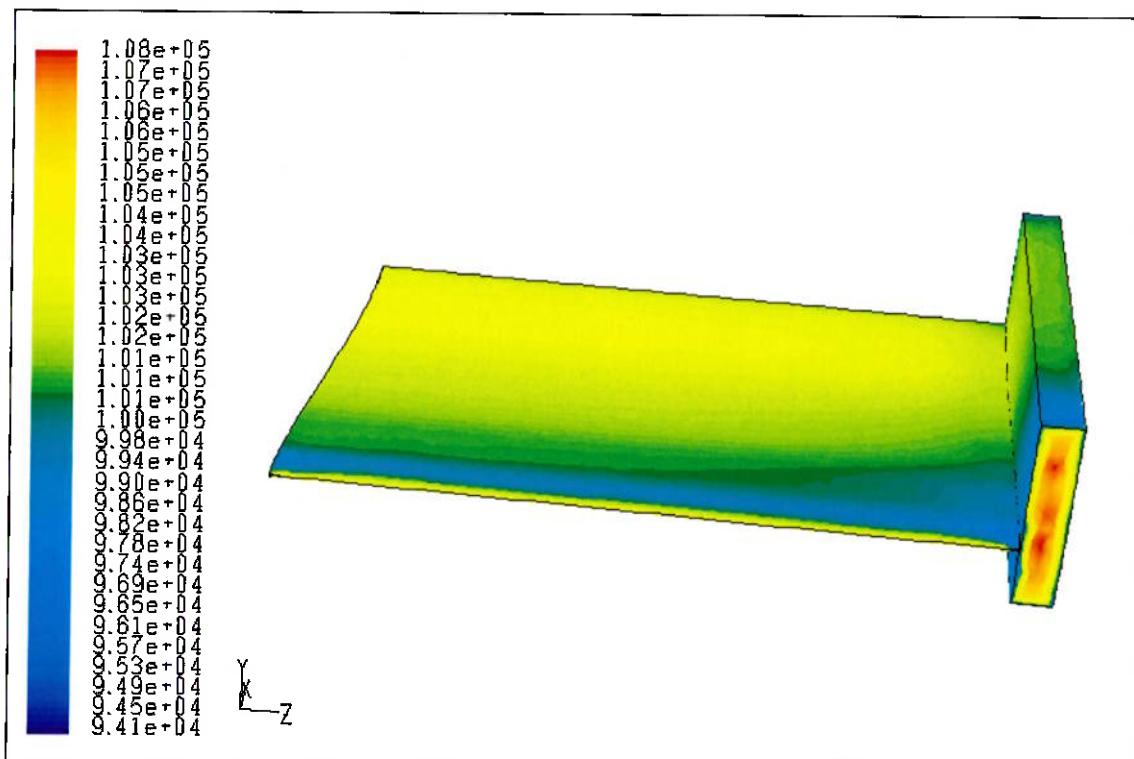


Figura 60 Contorno de pressão na superfície superior da geometria.

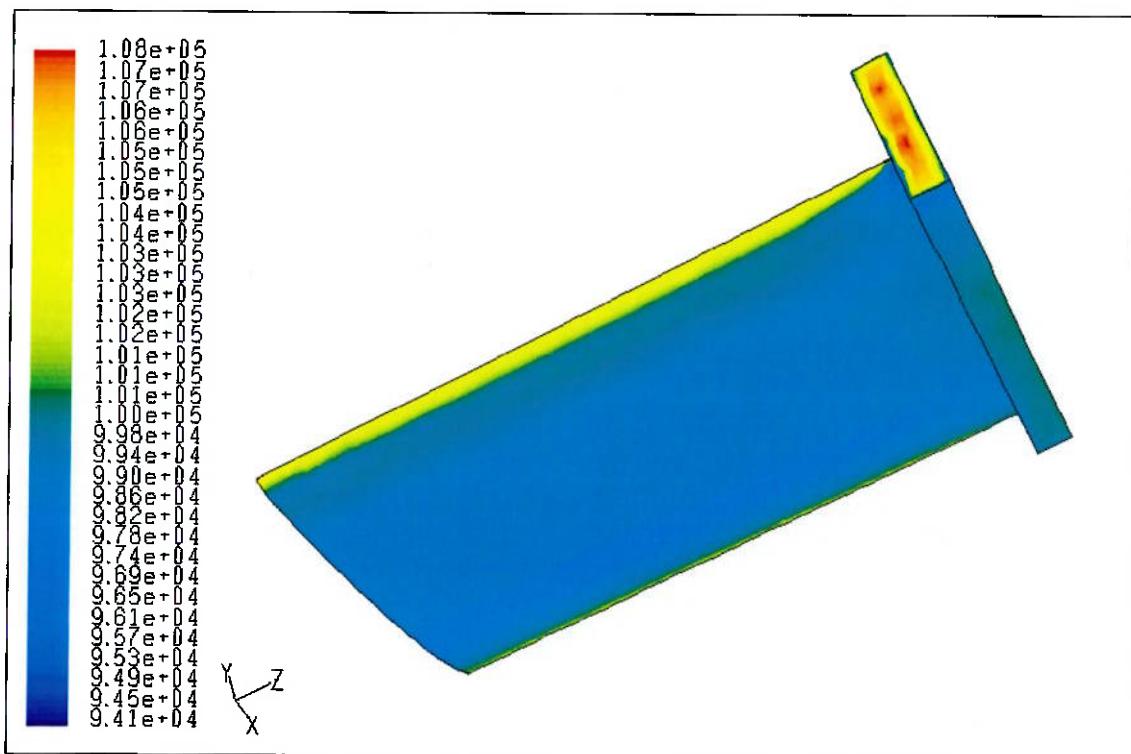


Figura 61 Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.

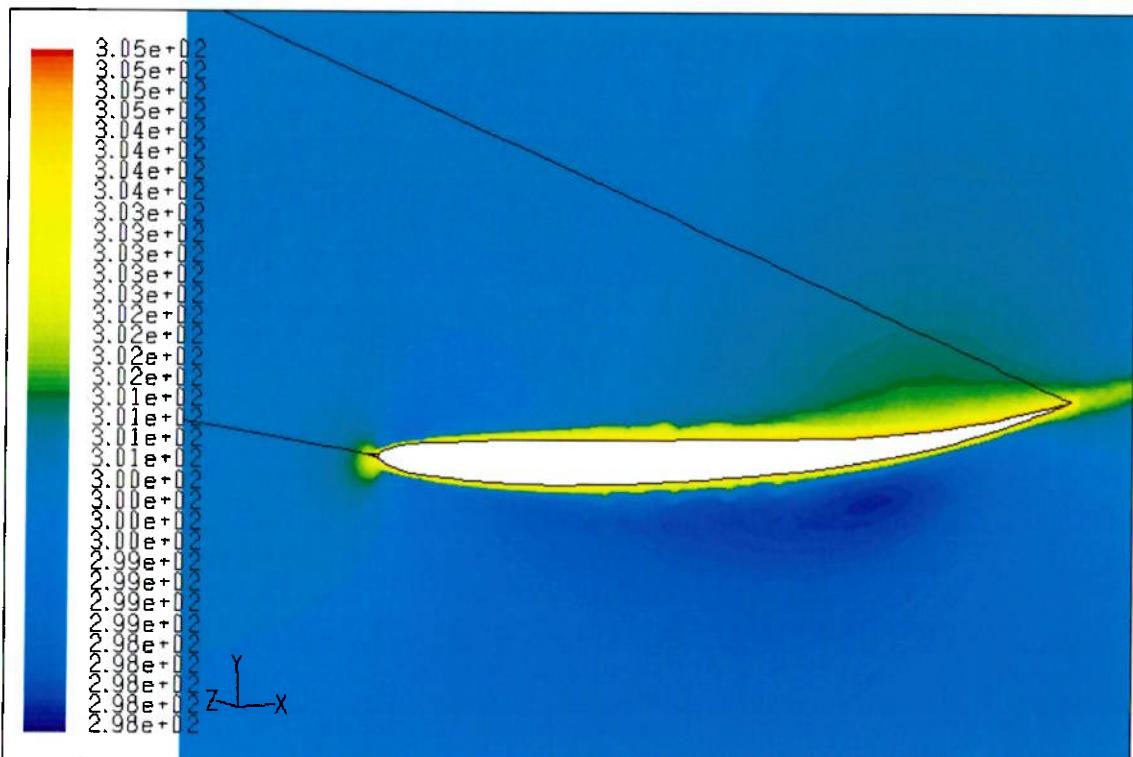
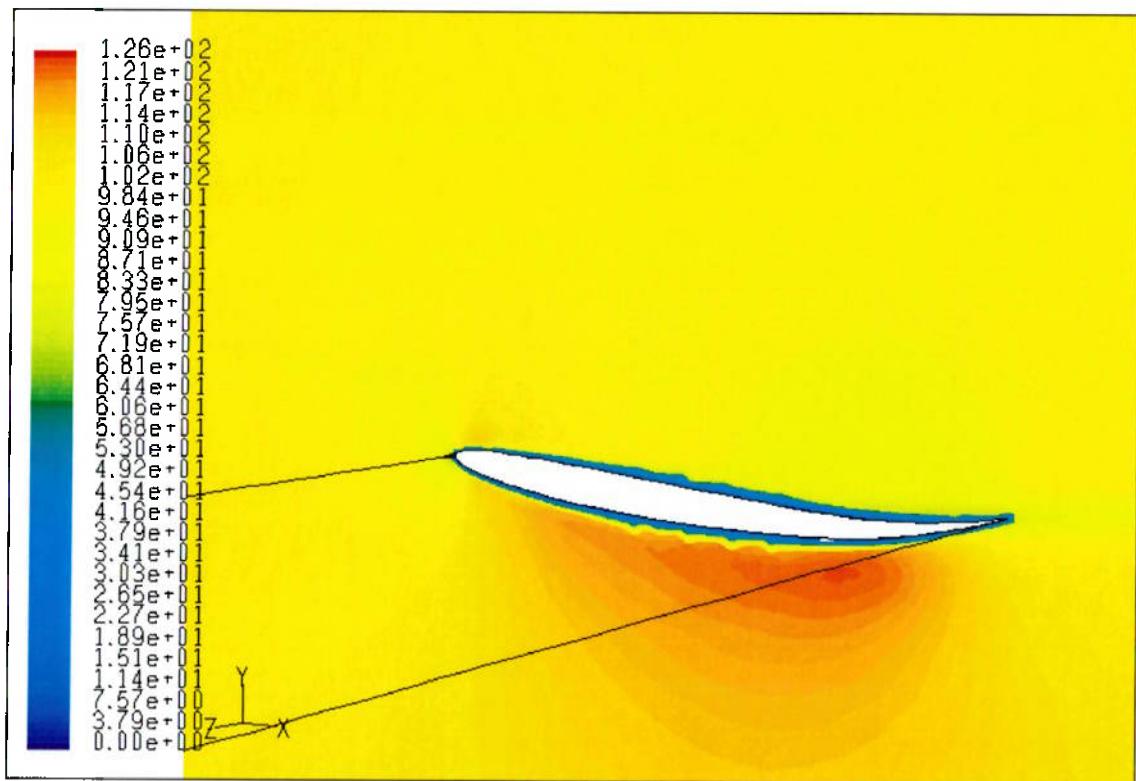


Figura 62 Contorno de temperatura na parede de simetria.



**Figura 63** Contorno de velocidade na parede de simetria.

Na Figura 62 mostra o contorno da temperatura na parede de simetria do problema. Note que os maiores valores de temperatura estão próximas a região da parede, onde os gradientes de velocidade em relação as coordenadas cartesianas são mais intensos. Isso pode ser esclarecido de uma melhor forma se olharmos a função de dissipação viscosa na equação da energia.

O campo de velocidade na parede de simetria é apresentado na Figura 63. Nela podemos ver que a magnitude da velocidade é maior na superfície inferior da asa, ou seja, o lado de menor pressão. Veja também que na região da parede propriamente dita o valor da velocidade é zero, conforme o princípio da aderência.

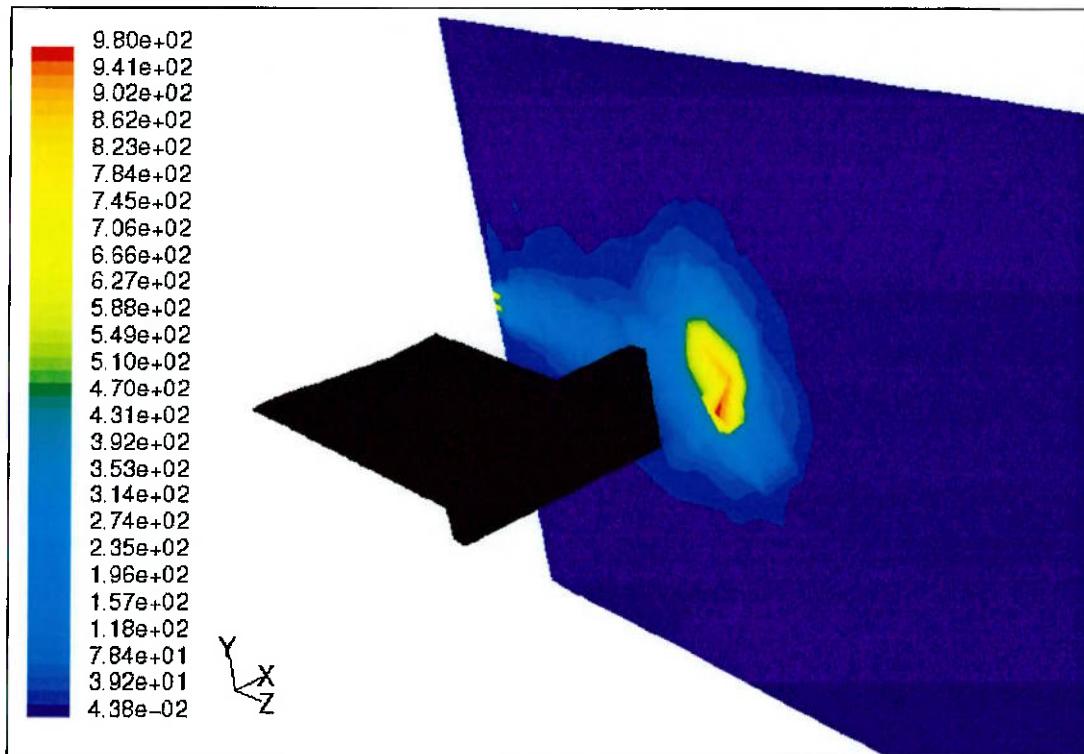


Figura 64 Valores de vorticidade no plano afastado  $\frac{1}{2}$  corda da asa.

O contorno de vorticidade, num plano que está localizado a uma distância de  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga da asa, é mostrado na Figura 64. Note que lugar o escoamento próximo a ponta da asa é onde a magnitude da vorticidade é mais intensa. Isso pode ser confirmado quando observamos novamente a Figura 59, que mostra as linhas de corrente nessa região.

Para essa geometria observamos que a modificação construída na lateral da asa causou um acréscimo no valor máximo da magnitude de vorticidade, tanto com relação a geometria 01 como na geometria 02.

#### 5.2.4. Geometria 04

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.2. A malha utilizada nesta simulação possui 265306 células, 5420 faces na condição de campo de pressão ao longe, 21985 faces na condição de parede e 17011 faces na parede de simetria.

A figura abaixo mostra a quarta geometria utilizada para realizar esse estudo.

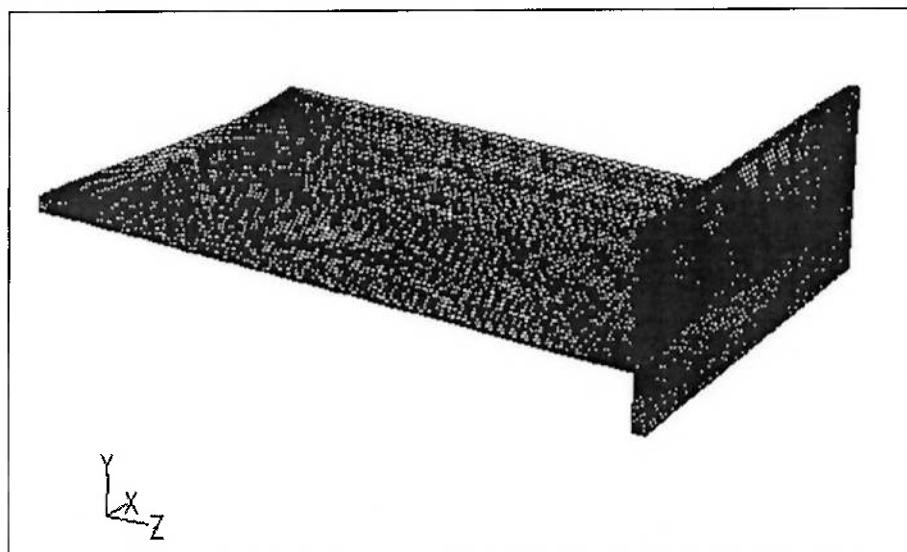


Figura 65 Malha da geometria utilizada na quarta simulação.

#### 5.2.4.1. Resultados gráficos

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A Figura 66 mostra as linhas de corrente que vem desde o lado montante do escoamento, passa através da asa e segue para jusante. Note que as linhas de corrente, assim como no caso anterior, têm uma tendência a se deslocarem de cima para baixo, ou seja, do lado de maior pressão para o lado de menor pressão. Isso pode ficar mais claro quando observamos o campo de pressão na Figura 67 e Figura 68.

Como dito acima, a Figura 67 e Figura 68, mostram o campo de pressão na parede da asa e fica claro que o lado superior é o lado de maior pressão. Assim sendo, há uma força resultante vertical para baixo (“Down Force”) que gera um coeficiente de sustentação negativo, visto na Tabela 5.1.

Com essa nova geometria, chegamos a resultados de pressão maiores na superfície superior, de tal forma que o coeficiente de sustentação seja ligeiramente maior, em módulo, que no primeiro, segundo e terceiro casos. Em outras palavras, significa dizer que a integral do campo de pressão ao longo da área do aerofólio produz uma força vertical com módulo maior que os outros três casos anteriores.

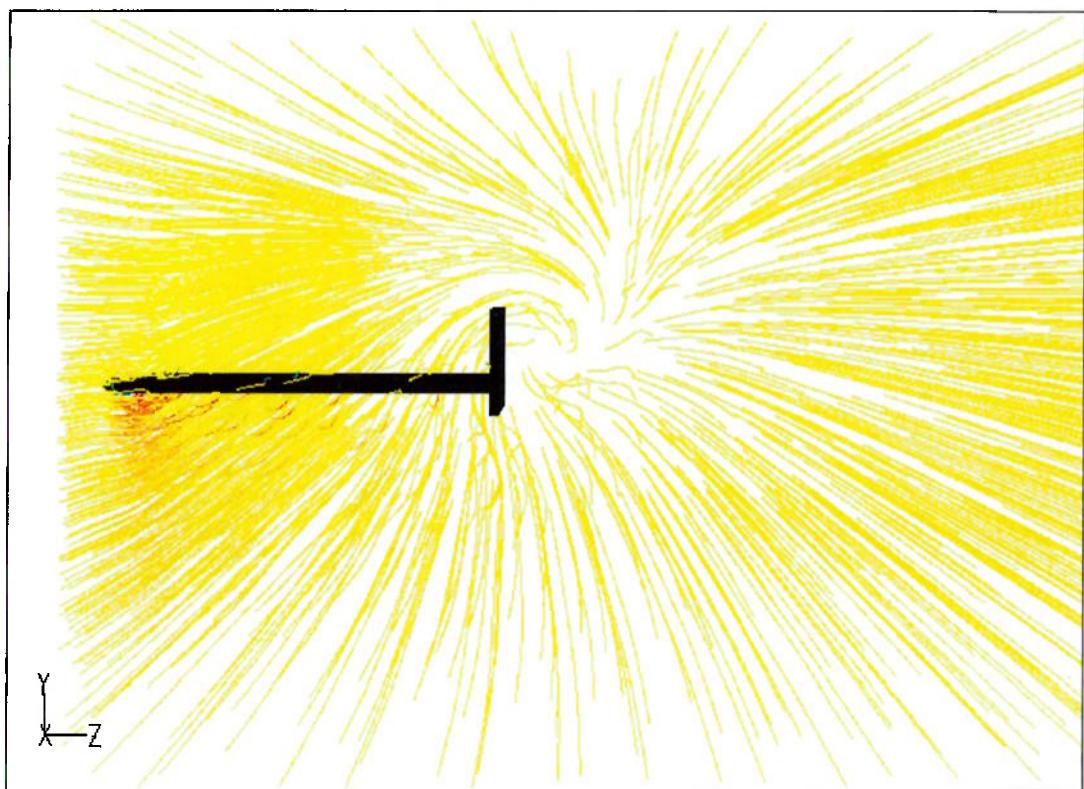


Figura 66 Linhas de corrente.

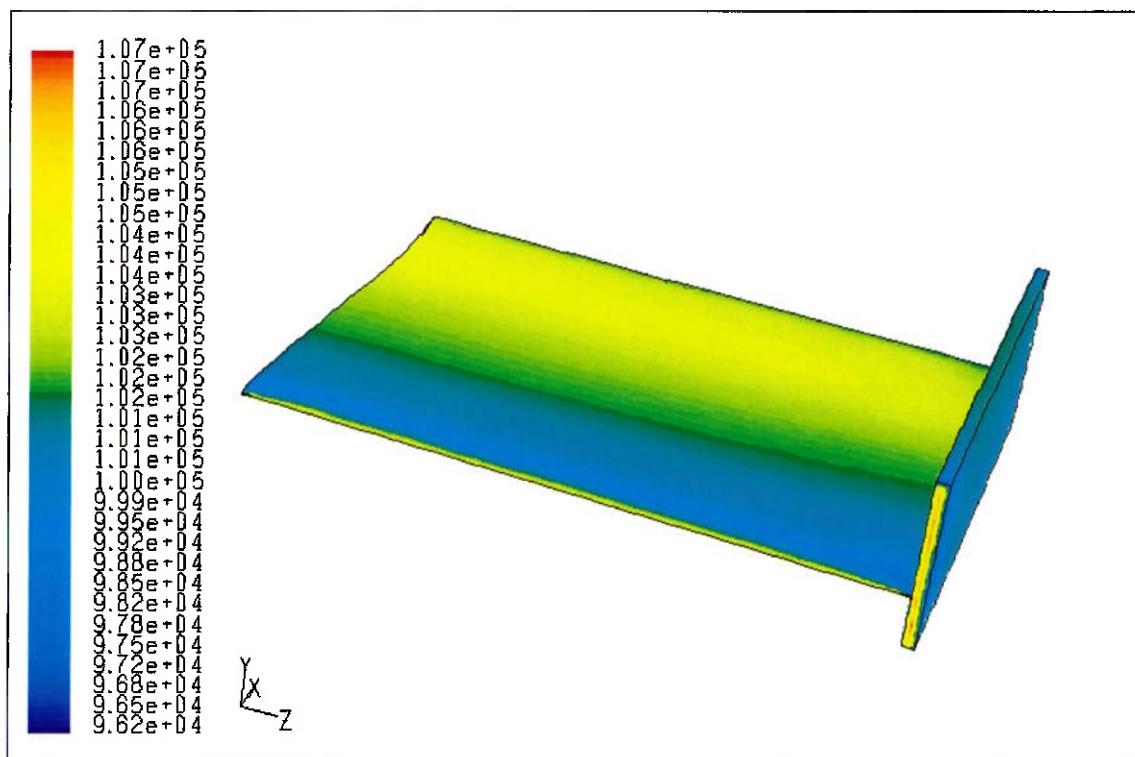


Figura 67 Contorno de pressão na superfície superior da geometria.

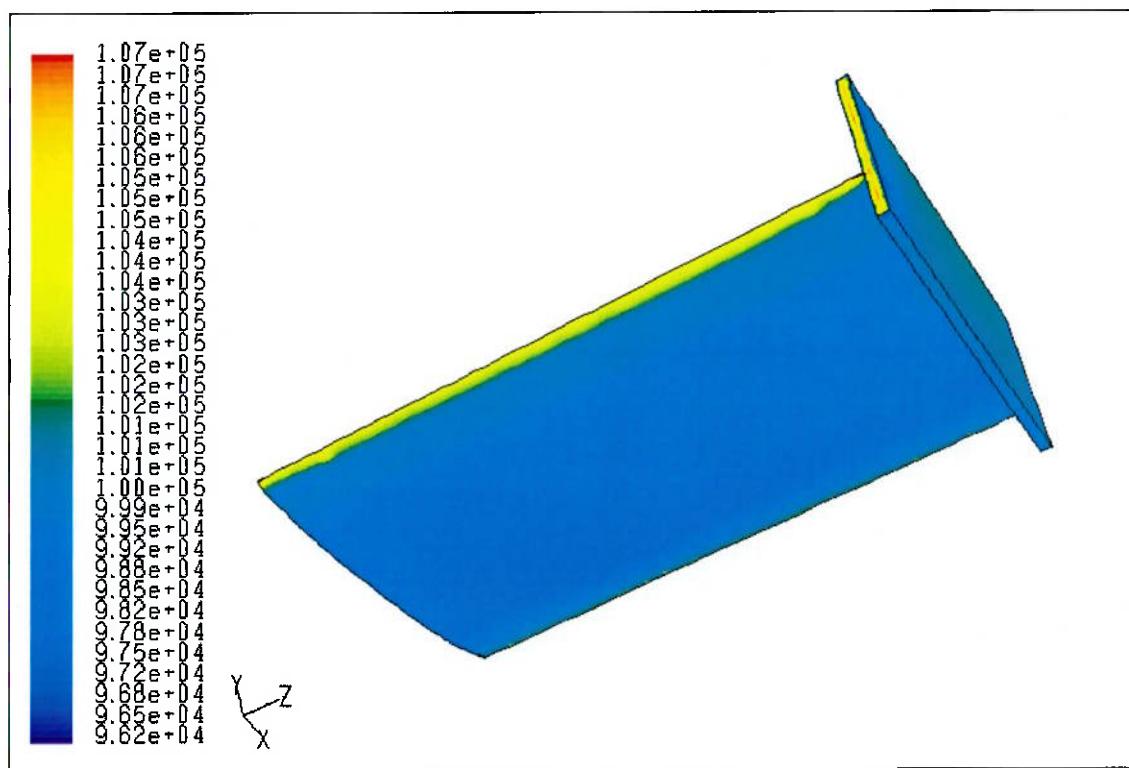


Figura 68 Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.

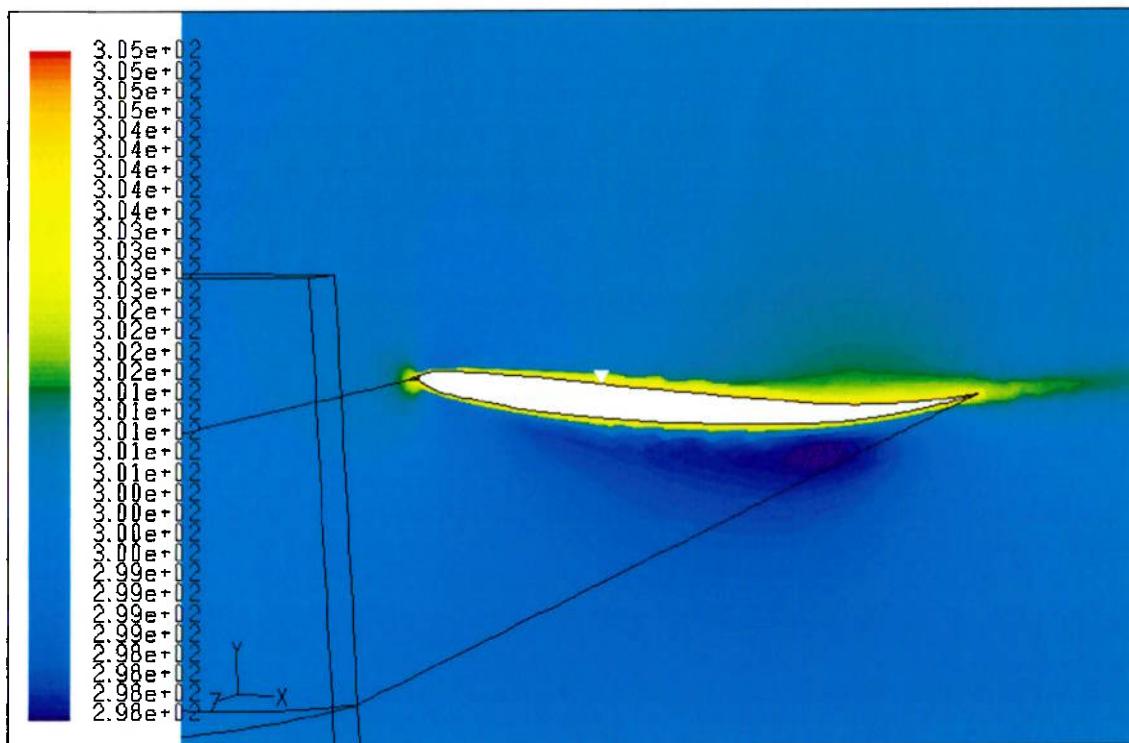
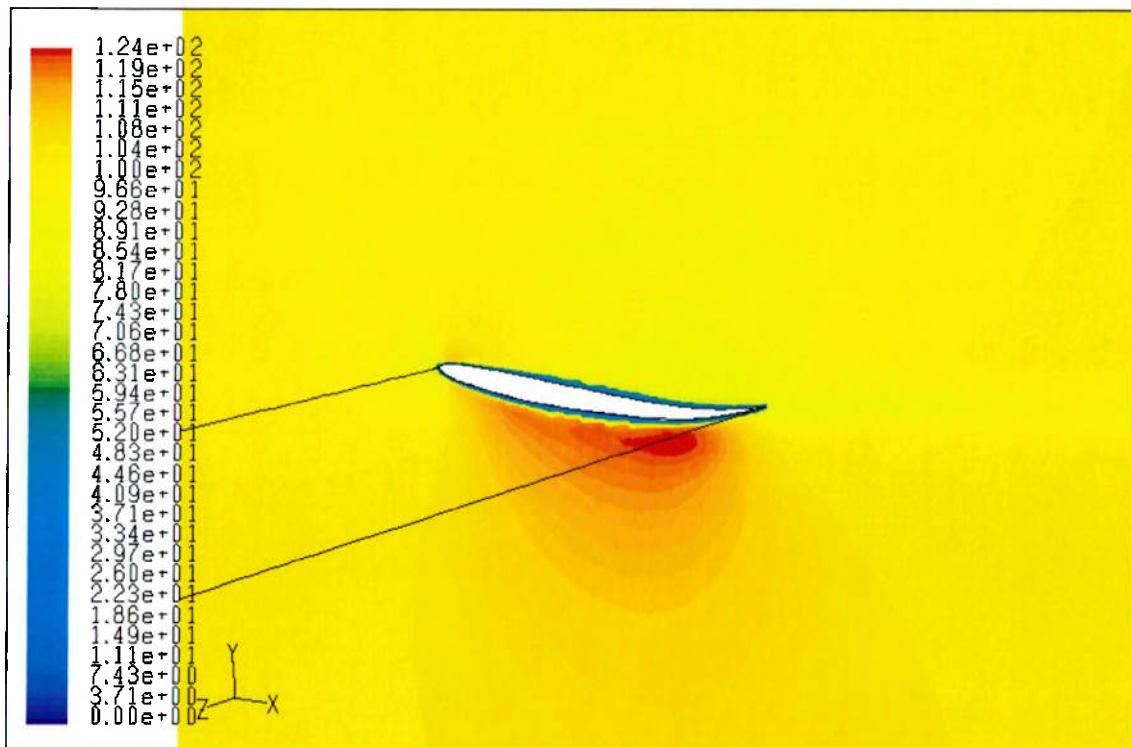


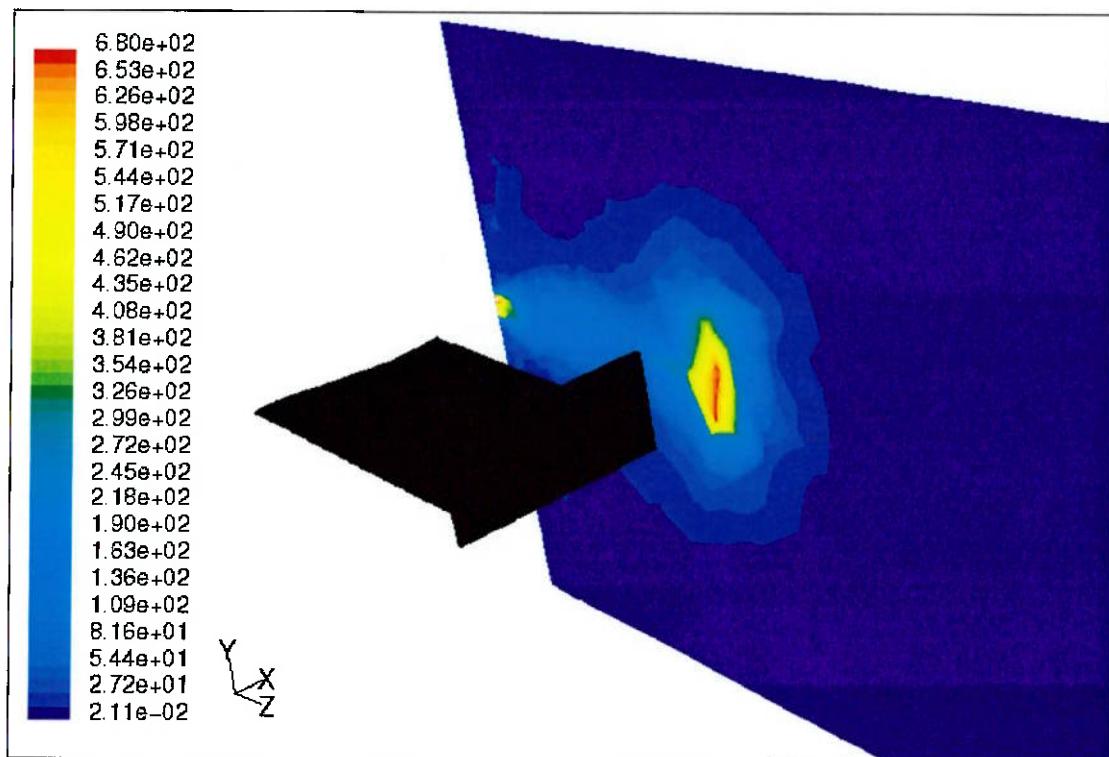
Figura 69 Contorno de temperatura na parede de simetria.



**Figura 70** Contorno de velocidade na parede de simetria.

Na Figura 69 mostra o contorno da temperatura na parede de simetria do problema. Note que os maiores valores de temperatura estão próximas a região da parede, onde os gradientes de velocidade em relação as coordenadas cartesianas são mais intensos. Isso pode ser esclarecido de uma melhor forma se olharmos a função de dissipação viscosa na equação da energia.

O campo de velocidade na parede de simetria é apresentado na Figura 70. Nela podemos ver que a magnitude da valocidade é maior na superfície inferior da asa, ou seja, o lado de menor pressão. Veja também que na região da parede propriamente dita o valor da velocidade é zero, conforme o princípio da aderência.



**Figura 71** Valores de vorticidade no plano afastado  $\frac{1}{2}$  corda da asa.

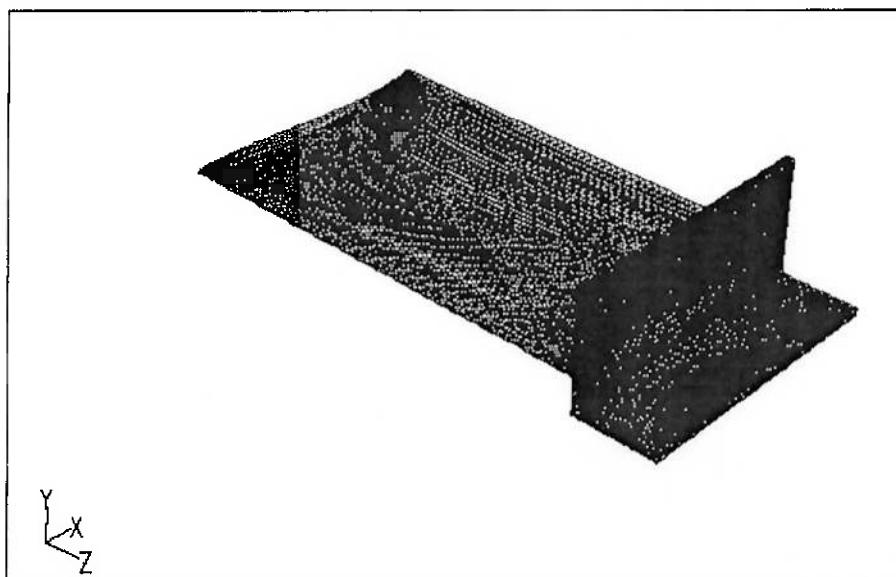
O contorno de vorticidade, num plano que está localizado a uma distância de  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga da asa, é mostrado na Figura 71. Note que lugar o escoamento próximo a ponta da asa é onde a magnitude da vorticidade é mais intensa. Isso pode ser confirmado quando observamos novamente a Figura 66, que mostra as linhas de corrente nessa região.

Para essa geometria observamos que a modificação construída na lateral da asa causou um decréscimo no valor máximo da magnitude de vorticidade, com relação as geometria 01 e 03; e um acréscimo com relação a geometria 02.

### 5.2.5. Geometria 05

A análise deste perfil considera as informações citados no item 5.2. A malha utilizada nesta simulação possui 297039 células, 5420 faces na condição de campo de pressão ao longe, 27907 faces na condição de parede e 16981 faces na parede de simetria.

A figura abaixo mostra a quinta geometria utilizada para realizar esse estudo.



**Figura 72** *Mallha da geometria utilizada na primeira simulação.*

#### 5.2.5.1. Resultados gráficos

Os resultados obtidos são mostrados a seguir. A Figura 73 mostra as linhas de corrente que vem desde o lado montante do escoamento, passa através da asa e segue para jusante. Note que as linhas de corrente, assim como no caso anterior, têm uma tendência a se deslocarem de cima para baixo, ou seja, do lado de maior pressão para o lado de menor pressão. Isso pode ficar mais claro quando observamos o campo de pressão na Figura 74 e Figura 75.

Como dito acima, a Figura 74 e Figura 75 mostram o campo de pressão na parede da asa e fica claro que o lado superior é o lado de maior pressão. Assim sendo, há uma força resultante vertical para baixo (“Down Force”) que gera um coeficiente de sustentação negativo, visto na Tabela 5.1.

Com essa nova geometria, chegamos a resultados de pressão maiores na superfície superior, de tal forma que o coeficiente de sustentação seja ligeiramente maior, em módulo, que no primeiro, segundo e terceiro casos. Em outras palavras, significa dizer que a integral do campo de pressão ao longo da área do aerofólio produz uma força vertical com módulo maior que todos os outros casos anteriores.

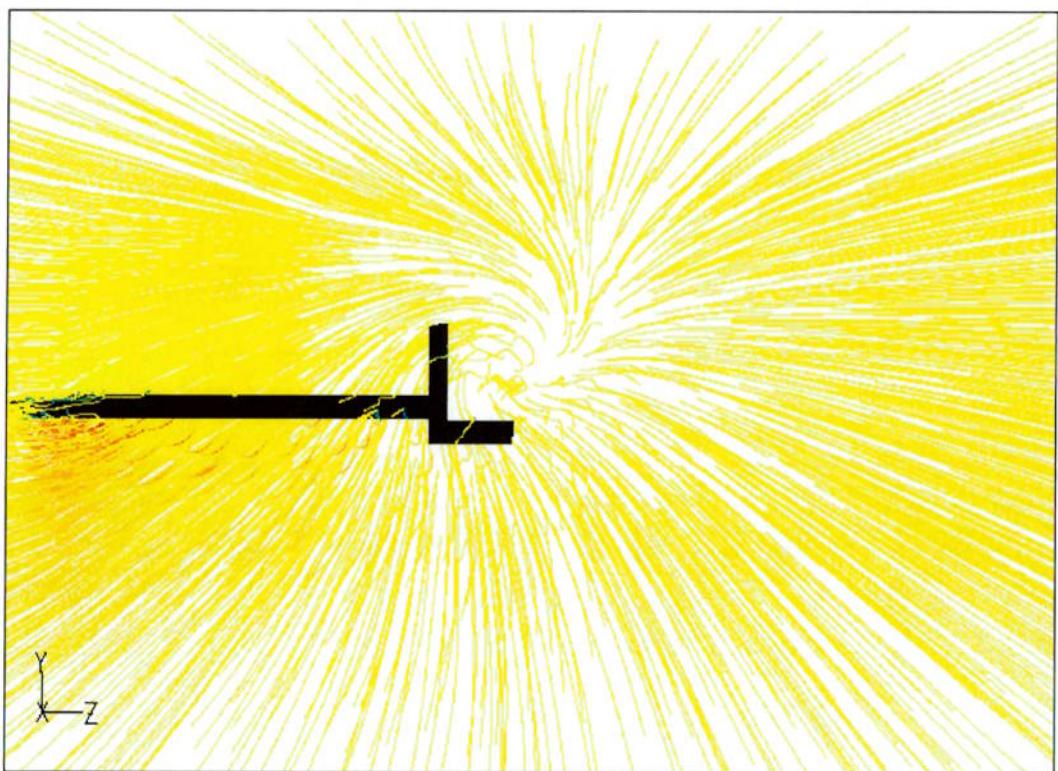


Figura 73 Linhas de corrente.

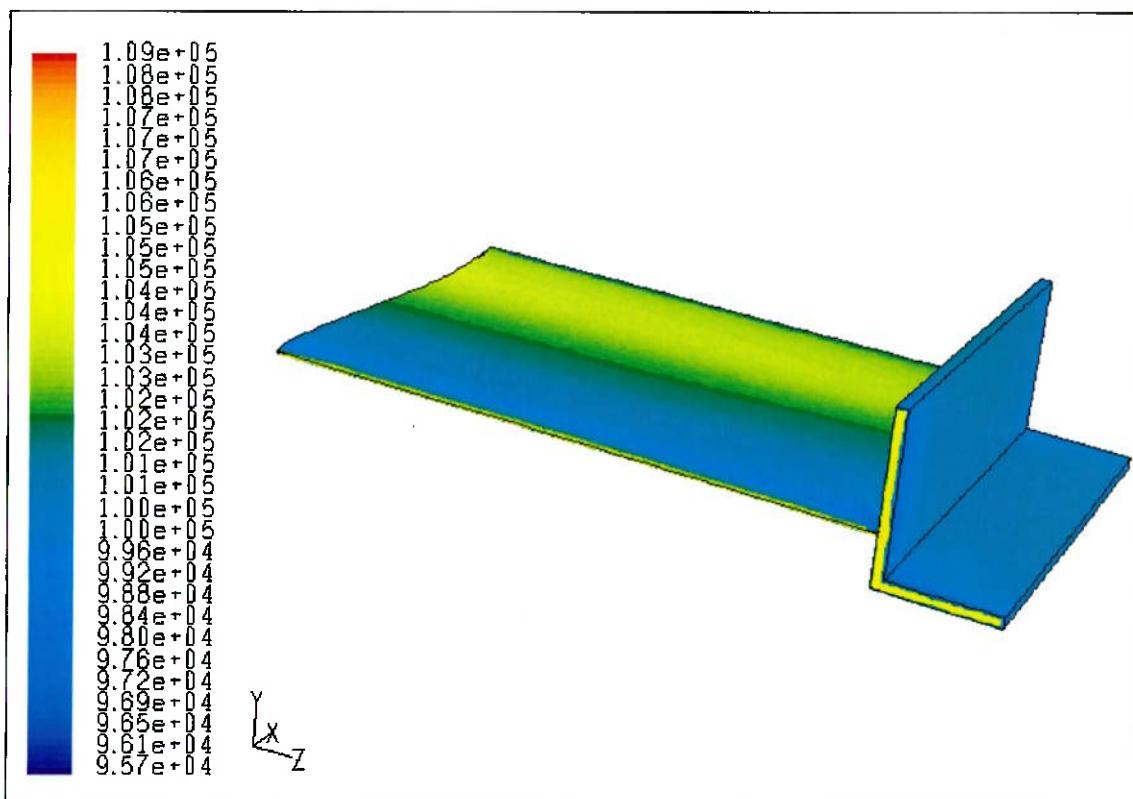
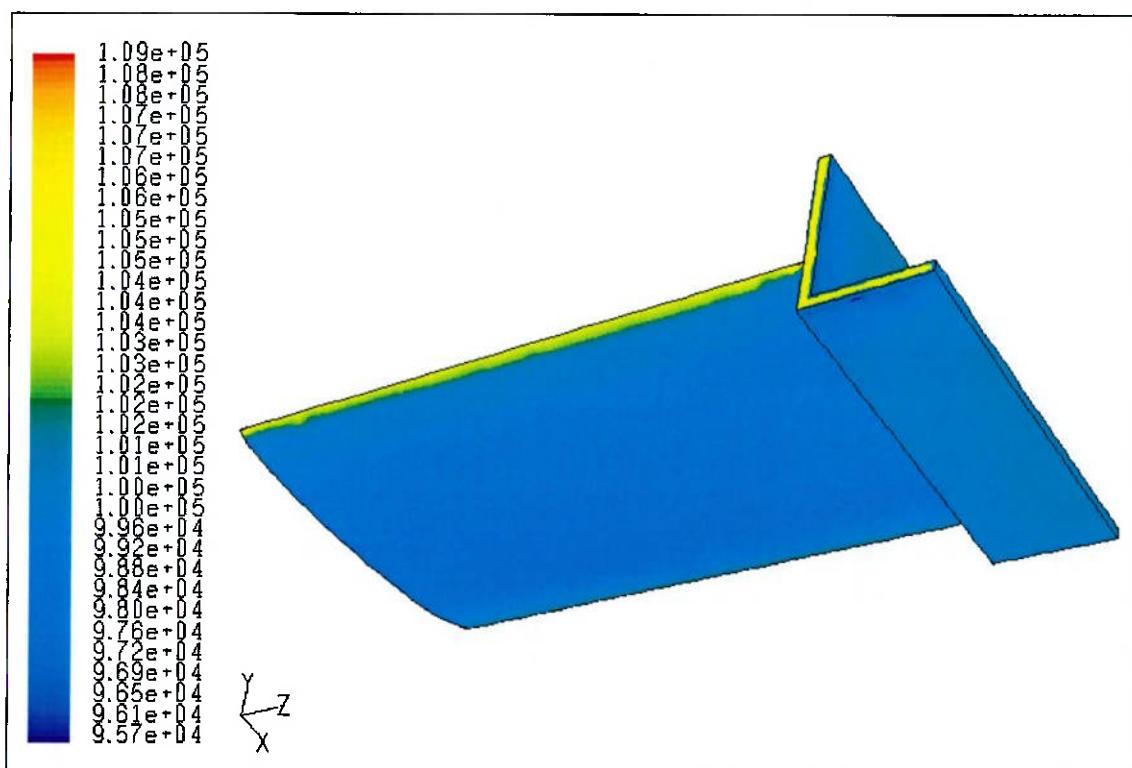
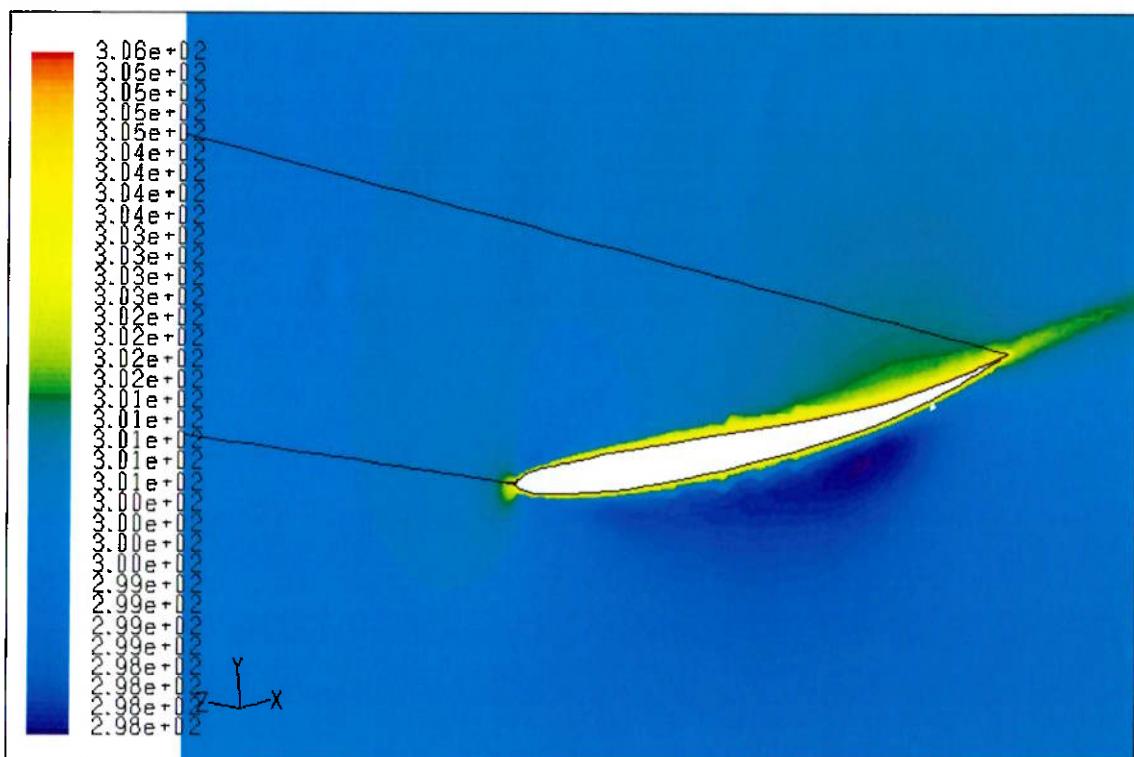


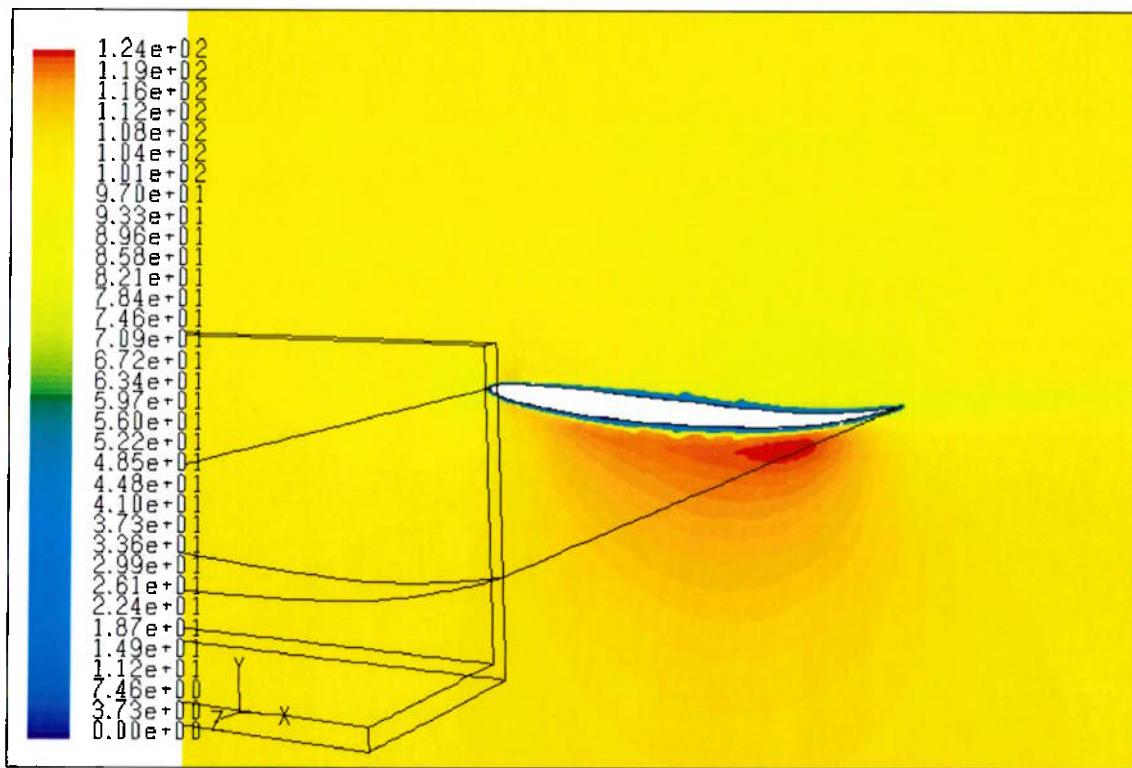
Figura 74 Contorno de pressão na superfície superior da geometria.



**Figura 75** Contorno de pressão na superfície inferior da geometria.



**Figura 76** Contorno de temperatura na parede de simetria.



**Figura 77** Contorno de velocidade na parede de simetria.

Na Figura 76 mostra o contorno da temperatura na parede de simetria do problema. Note que os maiores valores de temperatura estão próximas a região da parede, onde os gradientes de velocidade em relação as coordenadas cartesianas são mais intensos. Isso pode ser esclarecido de uma melhor forma se olharmos a função de dissipação viscosa na equação da energia.

O campo de velocidade na parede de simetria é apresentado na Figura 77. Nela podemos ver que a magnitude da valocidade é maior na superfície inferior da asa, ou seja, o lado de menor pressão. Veja também que na região da parede propriamente dita o valor da velocidade é zero, conforme o princípio da aderência.

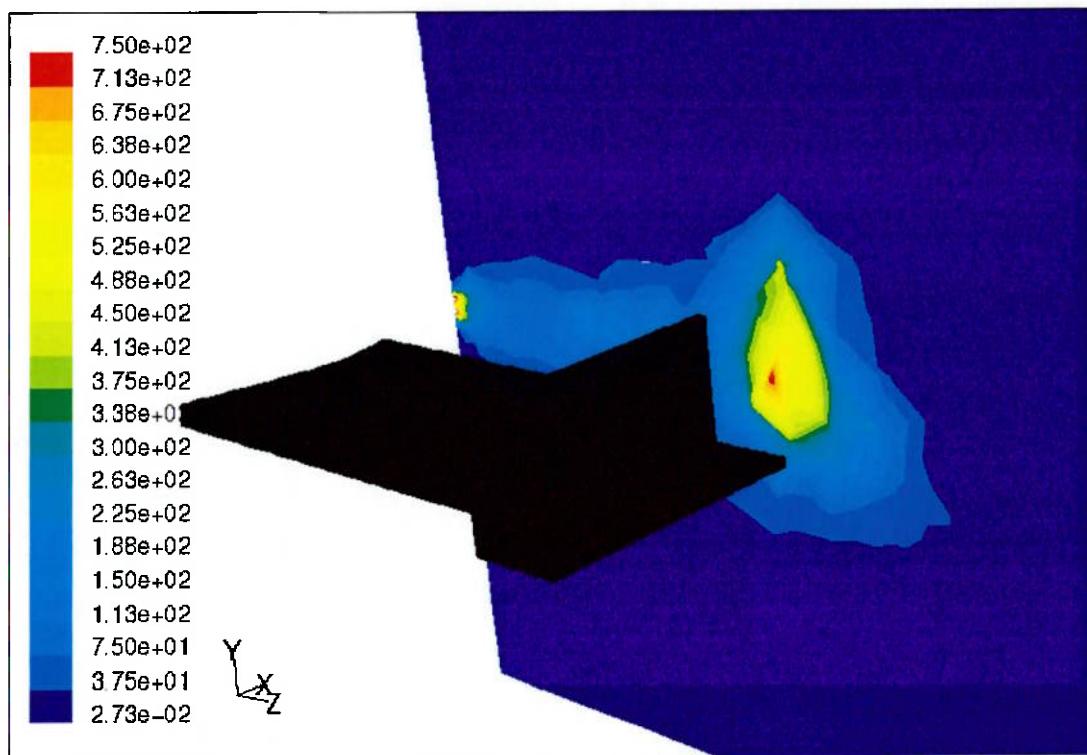


Figura 78 Contorno de vorticidade no plano localizado a  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga.

O contorno de vorticidade, num plano que está localizado a uma distância de  $\frac{1}{2}$  corda do bordo de fuga da asa, é mostrado na Figura 78. Note que lugar o escoamento próximo a ponta da asa é onde a magnitude da vorticidade é mais intensa. Isso pode ser confirmado quando observamos novamente aFigura 73, que mostra as linhas de corrente nessa região.

Para essa geometria observamos que a modificação construída na lateral da asa causou um decréscimo no valor máximo da magnitude de vorticidade, com relação as geometrias 01 e 03; e um acréscimo com relação as geometrias 02 e 04.

### 5.2.6. Resumo dos Resultados

Nesta seção estão expostos de maneira suscinta os resultados alcançados com as simulações numéricas das cinco geometrias detalhadas anteriormente.

A tabela abaixo esclarece melhor os dados obtidos.

		$F_L$ (N)	$C_L$	$F_D$ (N)	$C_D$	$C_L/C_D$
01		-444,51	-0.3839	32,69	0.0282	13.613
02		-459,75	-0.3971	36,49	0.0315	12.606
03		-470,68	-0.4065	60,31	0.0521	7.802
04		-485,27	-0.4191	43,20	0.0373	11.236
05		-512,56	-0.4427	50,49	0.0436	10.154

*Tabela 5.1 Valores de  $C_L$  e  $C_D$  para as cinco geometrias estudadas.*

No item 6 pode-se encontrar um breve comentário a respeito dos resultados finais deste trabalho.

## 6. Comentários e Conclusões

Alguns comentários se fazem importante nessa fase do trabalho, para esclarecer eventuais dúvidas que surgem na leitura e interpretação do texto.

Os resultados obtidos com o modelo de turbulência escolhido não é algo em que possamos acreditar piamente, já o próprio nome diz ser um modelo. No entanto, para a aplicação que nos interessa, ou seja, o estudo de escoamentos externos compressíveis, esse é o modelo mais adequado para a análise dos resultados.

Outro fator importante que pode ser observado é com relação a malha utilizada em cada cálculo. No item 5.1.3 podemos ver com clareza essa influência.

A malha utilizada para o perfil NACA 2412 foi criada com aproximadamente 41200 células e foram necessárias cerca de 450 iterações até chegarmos a convergência requerida. A malha para o perfil 0012 possui cerca de 121000 células e para este caso foram calculadas quase 800 iterações até a convergência.

Podemos ver também, ainda em relação a quantidade de células presentes na malha, que o tempo de processamento aumenta significativamente com o incremento no número de elementos.

No item 5.2.6 podemos ver uma tabela contendo as principais informações obtidas das cinco simulações. Pode-se notar que todas as modificações adotadas no sólido diminuiram o valor de  $C_L / C_D$ .

As alterações criadas na geometria original aumentaram apenas os valores da força vertical (“Down Force”), porém a relação obtidas entre os coeficientes de sustentação e de arrasto obtidas nas simulações das geometrias 02, 03, 04 e 05 sempre foram menores que a da geometria 01;

Os resultados da forças verticais possuem valores próximos ao da realidade. Para a velocidade em questão, o valor dessa força (considerando um carro completo) é próximo do próprio peso do carro (600kg). A geometria 05 foi a que apresentou o maior valor de “Down Force” de aproximadamente 103kg. O resultado da tabela 5.1 mostra

que a força vertical para apenas um lado da asa é de cerca de 513 N, ou seja, cerca de 51.5 kg. Sendo assim, a outra metade da asa contribui com mais 51.5 kg, resultando numa força total de aproximadamente 103 kg.

As geometrias 3 e 4 são bem parecidas. Se olharmos na Figura 58 e na Figura 65, podemos ver que o “winglet” na ponta da asa da geometria 3 possui uma espessura maior que na 04. Dessa forma verificamos nitidamente que o valor do coeficiente de arrasto é bem maior no caso 3 que no caso 4, enquanto o coeficiente de sustentação é relativamente maior no caso 4. Tendo isso em vista, pode-se concluir que o acabamento superficial do “winglet” e a forma com que ele é criado interferem substancialmente no resultado final.

A realização desse trabalho permitiu a comparação entre as geometrias utilizadas, assim como era esperado, mostrando que a implantação dos “winglets” na ponta da asa contribui para o acréscimo progressivo do coeficiente de sustentação. Dessa forma, o resultado apresentado na Tabela 5.1 indica que a geometria 05 é a mais adequada para utilização, pois o valor da força vertical, em módulo, é maior que em todos os outros casos.

## 7. Bibliografia

- [1] R.W. Fox e A.T. McDonald, *Introdução à mecânica dos fluidos*, 5. ed, Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos, c2001.
- [2] Abbott, Ira H. A., *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*, [Corr. version / with a new pref. by the authors], New York : Dover Publications, [1959]
- [3] Anderson, John D, *Fundamentals of aerodynamics*, 2. ed, New York : McGraw-Hill, 1991.
- [4] Fluent Inc. (2003) "Fluent User's Guide", New Lebanon, NH, USA.
- [5] Maliska, Clovis R, *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*, 1. ed, Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos, c1995.
- [6] <http://www.flowsol.co.uk/solutions/automotive/>, 07/04/04
- [7] <http://www.fltechnical.net/forum/viewtopic.php?t=285>, 12/04/04
- [8] <http://scarbsf1.com/2003rearwings.html>, 12/04/04
- [9] <http://www.mh-aerotools.de/airfoils/javafoil.htm>, 22/04/04